Цепи Маркова. Листок 2

А. И. Буфетов, Я. М. Наприенко

Будем говорить, что случайная величина X обладает непрерывным распределением, если существует такая функция $f_X(t)$, называемая плотностью, что

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Приведём несколько примеров случайных величин с непрерывным распределением.
Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$:

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}$$

Стандартное нормальное распределение:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

И самое важное для нас экспоненциальное распределение с параметром λ:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Условной вероятностью $\mathbb{P}(A \mid B)$ события A при условии события B называется

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

при условии $\mathbb{P}(B) > 0$.

Задача 1. Докажите, что у экспоненциально распределённой случайной величины X отсутствует память, то есть

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Таким образом, если время ожидания автобуса распределено экспоненциально, то нет разницы: ждёте ли вы уже 10 минут или только пришли – вероятность, что автобус придёт через 5 минут остаётся той же.

Задача 2. Докажите, что экспоненциальное распределение это единственное распределение "без памяти".

Случайные величины независимы, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Задача 3. Пусть X_1 и X_2 две независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ_1 и λ_2. Докажите, что $\min(X_1, X_2)$ распределено экспоненциально. С каким параметром?

Если вы заведёте два экспоненциально распределённых будильника с параметрами λ_1 и λ_2, то время первого звонка какого-либо из будильников также распределено экспоненциально.

Задача 4. Рассмотрите марковскую цепь с непрерывным временем с двумя состояниями A и B (без петель). Сколько времени T_A мы проведём в начальном состоянии A до первого прыжка B? Подсказка: рассмотрите $\mathbb{P}(T_A > t + s \mid T_A > s)$.

Математическим ожиданием случайной величины с плотностью $f_X(t)$ называется

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) dt$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины. Интересно найти среднее значение других случайных величин с непрерывным распределением.

Задача 5. Сколько в среднем (математическое ожидание) мы будем сидеть в состоянии A в предыдущей задаче до первого прыжка в B?

Задача 6. Рассмотрите марковскую цепь с конечным числом состояний n и следующий алгоритм: начав со состояния A, мы устанавливаем n экспоненциально заведённых будильников с различными параметрами на каждое состояние и переходим в то состояние, чей будильник прозвенел первым. Докажите, что определение марковской цепи с непрерывным временем на лекции и наша конструкция эквивалентны.

Задача 7. Как связаны параметры будильников и элементы матрицы интенсивности Q?