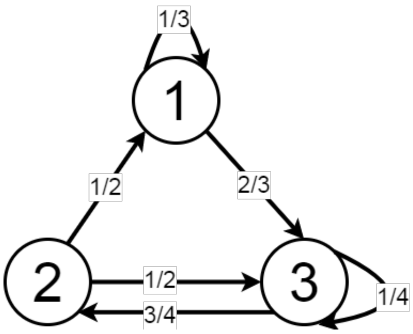
Цепи Маркова. Листок 1

А. И. Буфетов, Я. М. Наприенко

Пусть лягушка сидит на вершине 1 следующего треугольника и готовится к прыжку. Марковской цепью назовём ориентированный граф с вероятностями на ребрах (сумма вероятностей на выходящих из любой вершины ребрах должна равняться единице).



Лягушка прыгнет в вершину 3 с вероятностью 2/3, в вершину 2 с вероятностью 0 (так как нет ребра), а с вероятность 1/3 она прыгнет на месте (числа на ребрах указывают на вероятность прыжка вдоль ребра). Когда лягушка оказывается в новой вершине, она снова принимает решение прыгать, но уже смотрит на ребра, выходящие из новой вершины.

Задача 1. С какой вероятностью лягушка будет в каждой из вершин через а) два прыжка? б) три прыжка? в) четыре прыжка?

Квадратной матрицей порядка n называется таблица из чисел с n строками и n столбцами. Квадратные матрицы порядка n умножаются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 8 & -6 & 7 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 - 5\cdot 3 + 3\cdot 7 & 1\cdot 9 + 5\cdot 5 + 3\cdot 2 & 1\cdot 3 + 5\cdot 2 + 3\cdot 2 \\ 8\cdot 7 + 6\cdot 3 + 7\cdot 7 & 8\cdot 9 - 6\cdot 5 + 7\cdot 2 & 8\cdot 3 - 6\cdot 2 + 7\cdot 2 \\ -3\cdot 7 + 5\cdot 3 + 1\cdot 7 & -3\cdot 9 - 5\cdot 5 + 1\cdot 2 & -3\cdot 3 - 5\cdot 2 + 1\cdot 2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим матрицу P, на пересечении i-той строки и j-го столбца которой стоит вероятность попасть из вершины i в вершину j:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Найдите матрицы $P^2 = P \cdot P$, $P^3 = P \cdot P \cdot P$ и $P^4 = P \cdot P \cdot P \cdot P$. Как связаны вероятности из задачи 1 с элементами этих матриц? Почему так получается?

Задача 3. Каким условиям должна удовлетворять матрица Q, чтобы по ней можно было построить корректную марковскую цепь?

Задача 4. Постройте марковскую цепь по матрице

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Если для какого-то n все элементы матрицы P^n положительны, то матрица P (и задаваемая ею цепь) называется регулярной. Это означает, что можно выбрать такое число n, что ровно через n шагов мы можем попасть в любую вершину. Не стоит путать это свойство с более слабым свойством неприводимости матрицы (цепи), при котором в любую вершину можно попасть за какое-то число шагов.

Задача 5. Придумайте неприводимую, но не регулярную марковскую цепь и напишите её матрицу.

Задача 6. Регулярная матрица марковской цепи с двумя состояниями имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

для каких-то a и b таких, что $0 < a + b < 2$.
а) Докажите, что

$$Q^n = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}$$

б) Что будет происходить с матрицей A^n при увеличении n (в пределе)?

Задача 7. Зависит ли предельная вероятность от начального положения в задаче 6? Попробуйте объяснить причину.