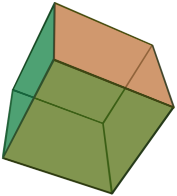
Комбинаторика семейств многогранников и приложения

В. М. Бухштабер

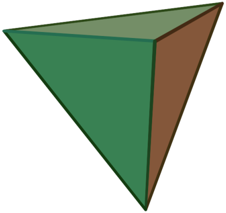
МИАН имени В. А. Стеклова,
МГУ имени М. В. Ломоносова,
ИППИ имени А. А. Харкевича

XVII Летняя школа «Современная математика»
посвящённая памяти Виталия Арнольда
Дубна 19-30 июля 2017 года

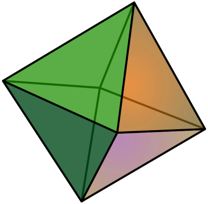
Платоновы тела



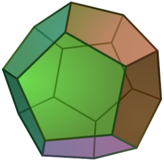
Куб



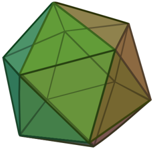
Тетраэдр



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Только 5 тел обладают следующими свойствами:

- Выпуклые многогранники.
- Все грани – одинаковые правильные многоугольники.
- Для любой пары вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну вершину в другую.

Опубликовано в 1596 г.

Многогранники в природе

Куб серного колчедана – пирит.
Таким он вырос в природе. Его никто не обрабатывал.

Многогранники в природе

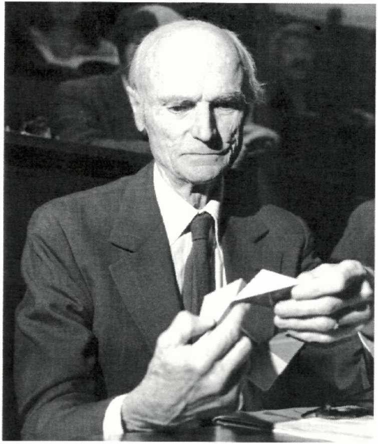


Figure 3. H. S. M. Coxeter (1907–2003). Photograph by Stan Sherer.

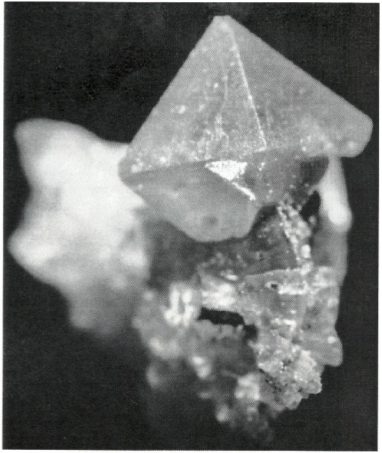


Figure 10.1. A wulfenite crystal: an orange flattened octahedron.

Многогранники в природе

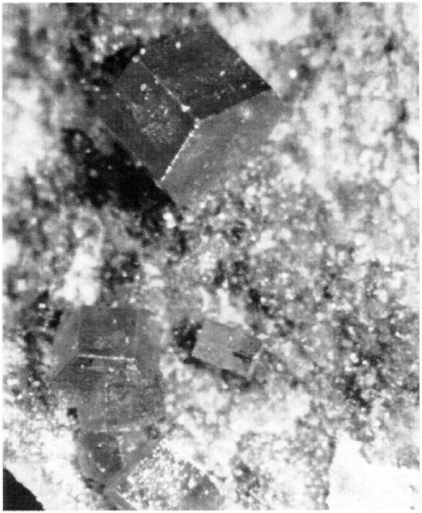


Figure 10.2. Crystals of vanadinite: red hexagonal prisms.

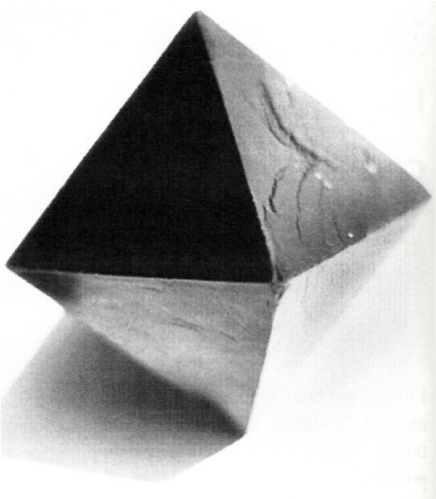


Figure 10.4. Chrome alum: perfect octahedron, weighing 867 grams.

Многогранники в природе

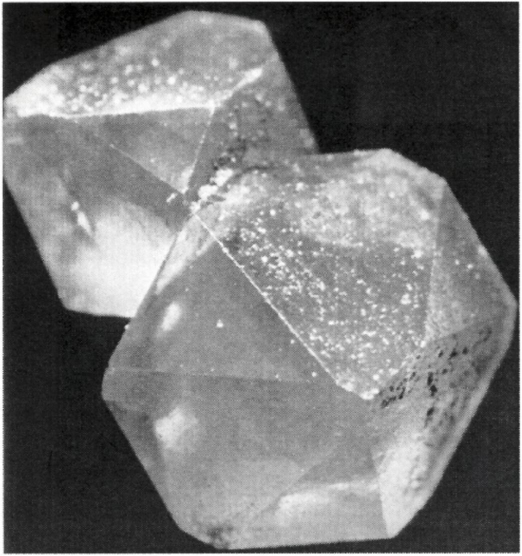


Figure 10.3. Hematite-stained quartzoids: polyhedra

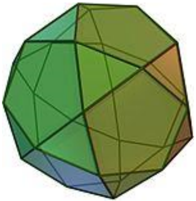
Пусть f_0-число вершин, f_1 – число рёбер и f_2 — число двумерных граней трёхмерного многогранника. Тогда

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2$$

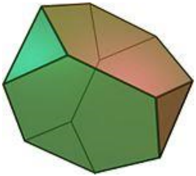
	f_0	f_1	f_2
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Архимедовы тела и их f-векторы

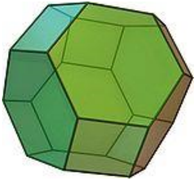
Кубооктаэдр
$(12, 24, 14)$



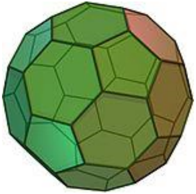
Икосододекаэдр
$(30, 60, 32)$



Усечённый тетраэдр
$(12, 18, 8)$

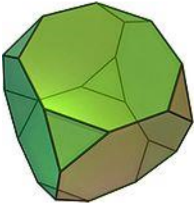


Усечённый октаэдр
$(24, 36, 14)$

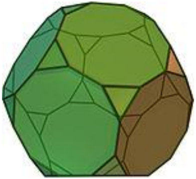


Усечённый икосаэдр
$(60, 90, 32)$

Архимедовы тела и их f-векторы

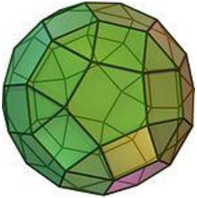


Усечённый куб
$(24, 36, 14)$



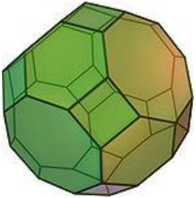
Усечённый додекаэдр
$(60, 90, 32)$

Ромбокубоктаэдр
$(24, 48, 26)$

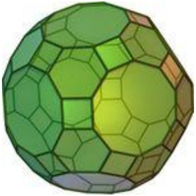


Ромбоикосододекаэдр
$(60, 120, 62)$

Архимедовы тела и их f-векторы



Ромбоусечённый кубооктаэдр
$(48, 72, 26)$



Ромбоусечённый икосододекаэдр
$(120, 180, 62)$

Курносый куб
$(24, 60, 38)$

Курносый додекаэдр
$(60, 150, 92)$

С точностью до движения трёхмерного пространства имеется только 13 тел со следующими свойствами:

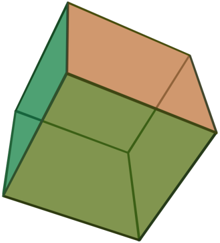
- Выпуклые многогранники.
- Все грани – правильные многоугольники двух или более типов.
- Для любой пары вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну вершину в другую.

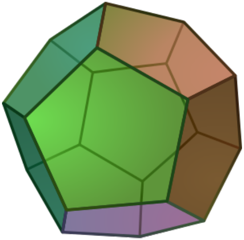
Из 13 архимедовых тел 11 с многоугольниками двух типов и два с многоугольниками трёх типов.

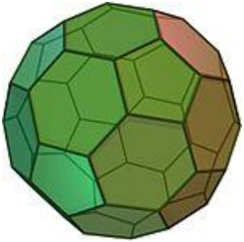
Курносый куб и курносый додекаэдр имеют две версии (левую и правую), которые получаются одна из другой отражением относительно плоскости и не могут быть совмещены движением, сохраняющим ориентацию пространства.

Определение

Трёхмерный многогранник называется простым, если в каждой его вершине сходится ровно три ребра.







Из 5 Платоновых тел 3 простых.
Из 13 Архимедовых тел 7 простых.

Формула Эйлера и простые многогранники

Пусть p_k – число k-угольных граней многогранника.

Для любого простого многогранника P выполняется

соотношение между числами p_k

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geqslant 7} (k-6)p_k$$

Следствие

Если $p_k = 0$ для $k \neq 5, 6$, то $p_5 = 12$.
Не существует простого многогранника только с шестиугольными гранями.

$$f_0 = 2(\sum_k p_k - 2) \quad f_1 = 3(\sum_k p_k - 2) \quad f_2 = \sum_k p_k \Longrightarrow f_0 = 2(f_2 - 2)$$

Реализация p-вектора

Теорема (Эберхард, 1891)

Для любого набора $(p_k | 3 \leqslant k \neq 6)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношению между числами p_k, существуют такое число p_6 и такой простой трёхмерный многогранник P^3, что $p_k = p_k(P^3)$ для всех $k \geqslant 3$.

Простые разбиения поверхностей на многоугольники

Разбиение замкнутой (то есть без края) двумерной поверхности на многоугольники называется простым, если в каждой вершине сходится ровно три ребра.

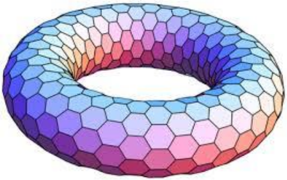
Для простого разбиения двумерной поверхности имеем

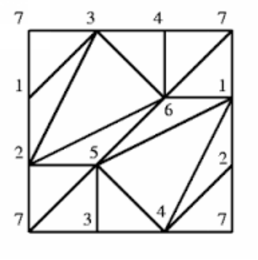
$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 6\chi(M^2) + \sum_{k\geqslant 7}(k-6)p_k,$$

где $\chi(M^2) = f_0 - f_1 + f_2$ – Эйлерова характеристика.

Следствие

Пусть существует простое разбиение поверхности M^2 на шестиугольники.
Тогда $\chi(M^2) = 0$, то есть M^2 – тор или бутылка Клейна.





Минимальная триангуляция тора
7 вершин, в каждой вершине сходится 6 рёбер.
Каноническое двойственное разбиение является простым и разбивает тор на 7 шестиугольников.

Реализация f-вектора

Теорема (Штейниц, 1906 г.)

Целочисленный вектор (f_0, f_1, f_2) является вектором граней трехмерного многогранника тогда и только тогда, когда

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad f_2 \leqslant 2f_0 - 4, \quad f_0 \leqslant 2f_2 - 4$$

Следствие

$$f_2 + 4 \leqslant 2f_0 \leqslant 4f_2 - 8$$

Проблема

Для многогранников размерности 4 до сих пор неизвестны условия, характеризующие вектор (f_0, f_1, f_2, f_3) его граней.

Графы трёхмерных многогранников

Определение

Рёберным графом многогранника называется его одномерный остов.

Теорема (Штейниц)

Граф G является рёберным графом трёхмерного многогранника тогда и только тогда, когда он является простым планарным графом, у которого не менее 4-х рёбер, причём удаление любых двух его вершин и всех выходящих из них рёбер сохраняет связность графа.

Плоскую реализацию рёберного графа трёхмерного многогранника даёт диаграмма Шлегеля.

Диаграммы Шлегеля (Виктор Шлегель, 1843–1905)

Определение

Диаграммой Шлегеля (1886) выпуклого трёхмерного многогранника P называется проекция этого многогранника на плоскость выбранной двумерной грани из точки вне многогранника, близкой к этой грани. Диаграмма зависит от выбора грани.

- Диаграмма Шлегеля представляет собой разбиение выбранной грани на многоугольники.
- Граф рёбер на диаграмме является полным комбинаторным инвариантом многогранника P.

Фуллерены

Атомы углерода, испарившиеся с разогретой поверхности графита, могут образовывать молекулы, представляющие собой выпуклые многогранники. Граница этих многогранников образована правильными 6- и 5-угольниками, вершины которых соответствуют атомам углерода.

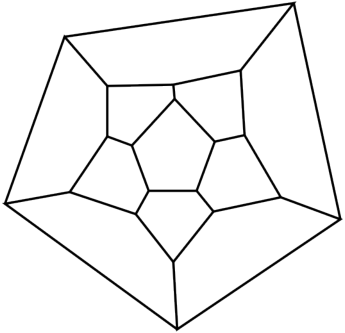
Биосфера Фуллера
Павильон США, Экспо-67
Монреаль, Канада

Эти молекулы названы фуллеренами в честь американского архитектора и философа Р. Бакминстера Фуллера, который запатентовал конструкцию геодезических куполов для покрытия больших площадей с опорами только на границе.

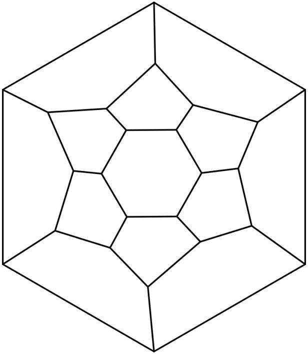
Buckyballs

Для фуллеренов в английском языке используется также название buckyballs.

Диаграммы Шлегеля фуллеренов



Додекаэдр
$p_6 = 0$



Бочка
$p_6 = 2$

Фуллерены

Фуллерены были открыты химиками-теоретиками Р.Кёрлом, Х. Крото и Р. Смолли в 1985 г. (Нобелевская премия, 1996).

Астрономы обнаружили заранее предсказанные характерные спектральные линии фуллеренов в космосе – в атмосферах углеродных звезд.
Затем и на Земле удалось их получить в пламени электрической дуги.
Долгое время фуллерены получали только в лабораториях научных центров.

К 1992 году стало известно, что в водорастворимой части шунгита содержится до одного процента фуллеренов.

Шунгит-фуллерены

Образцы шунгитовой породы

В 1877 году профессор геологии Петербургского университета А.А.Иностранцев определил новый крайний член в ряду природных некристаллических углеродов, не являющихся каменным углём. Он дал этой породе имя шунгит по названию заонежского села Шуньга, где она впервые была обнаружена.

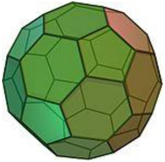
Эта порода присутствует в качестве примеси в шунгитовых сланцах и доломитах, распространённых по всему Заонежью — от Гирваса на западе до Толвуи и Шуньги на востоке.

Математические фуллерены и их f-векторы

Определение

(Математическим) фуллереном называется простой трёхмерный многогранник, у которого все двумерные грани являются пятиугольниками или шестиугольниками.

Фуллерен C_{60}



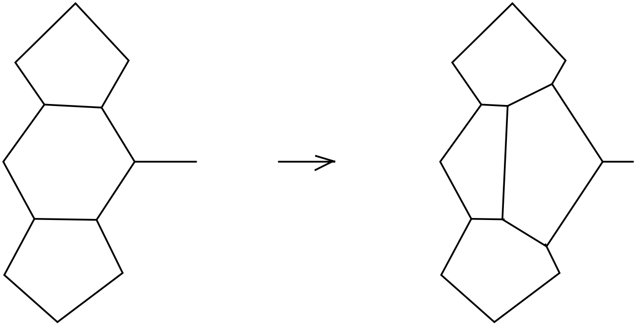
Усечённый икосаэдр

Для любого фуллерена $p_5 = 12$,

$$f_0 = 2(10 + p_6), \quad f_1 = 3(10 + p_6), \quad f_2 = (10 + p_6) + 2$$

Существуют фуллерены с любым значением $p_6 \neq 1$.

Перестройка Эндо-Крото



При помощи последовательности перестроек Эндо-Крото из бочки можно получить фуллерен с любым $p_6 = k$, $k \geqslant 2$.

Число комбинаторных типов фуллеренов

Согласно теореме W. Thurston'a (1998 год),

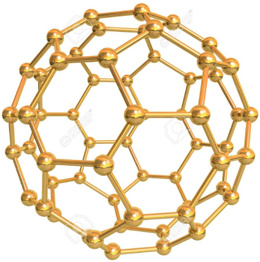
число $F(p_6)$ комбинаторных типов (изомеров) фуллеренов как функция от p_6 растёт ассимптотически, как p_6^9.

p_6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	190
$F(p_6)$	1	0	1	1	2	3	6	6	15	...	132247999328

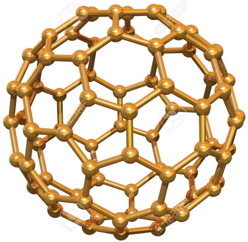
http://hog.grinvin.org

Определение

Фуллерен, имеющий группу (комбинаторных) симметрий икосаэдра, называется *икосаэдральным*.

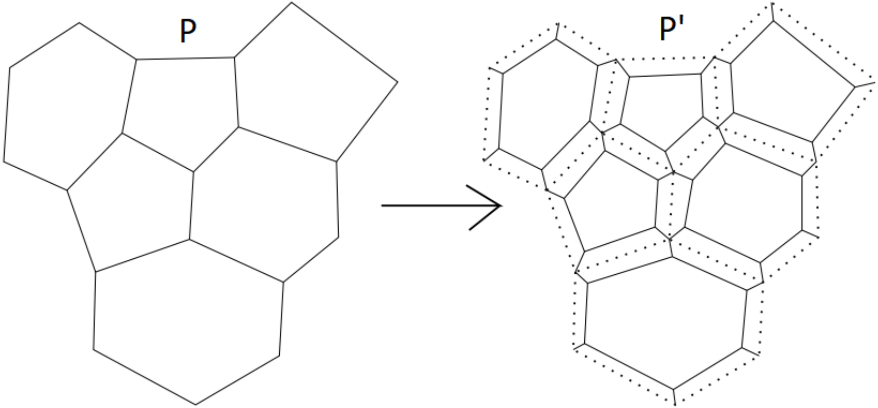


C_{60}



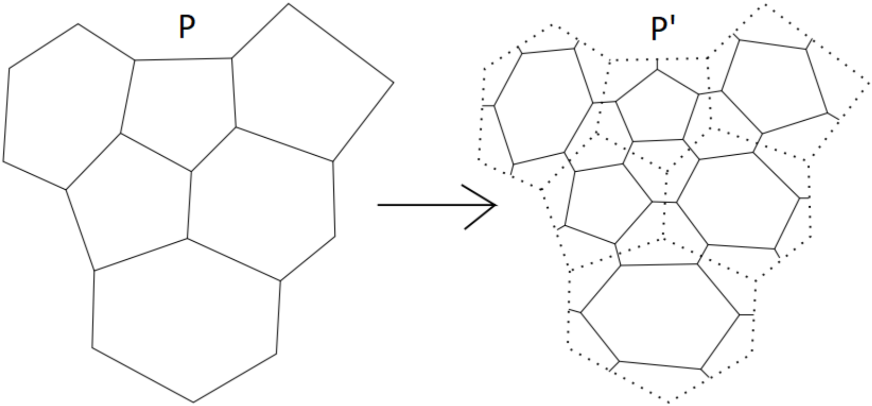
C_{80}

$F(20) = 1812$, только C_{60} является икосоэдральным.
$F(30) = 31924$, только C_{80} является икосоэдральным.



$$p_k(P') = \begin{cases} p_k(P), & k \neq 6; \\ p_6(P) + f_1(P), & k = 6. \end{cases}$$

Итерационная процедура II



$$p_k(P') = \begin{cases} p_k(P), & k \neq 6; \\ p_6(P) + f_0(P), & k = 6. \end{cases}$$

Приложения итерационных процедур

Процедура I срезает сразу все рёбра многогранника P. В результате каждое ребро порождает шестиугольник. Процедура II — глубокая срезка сразу всех вершин многогранника P. В результате каждая вершина порождает шестиугольник.

- процедура I увеличивает f_0 в 4 раза;
- процедура II увеличивает f_0 в 3 раза;
- процедуры I и II коммутируют.

Применение к додекаэдру:

- процедуры II даёт бакминстерфуллерен C_{60} с $p_6 = 20$;
- процедуры I даёт фуллерен C_{80} с $p_6 = 30$.

Икосаэдральные многогранники

Определение

Простой многогранник называется икосаэдральным, если

- все грани 5- и 6- угольники;
- группой симметрий многогранника является группа симметрий икосаэдра.

Икосоэдральные многогранники — это в точности те многогранники, которые получаются из додекаэдра многократным применением процедур I и II.

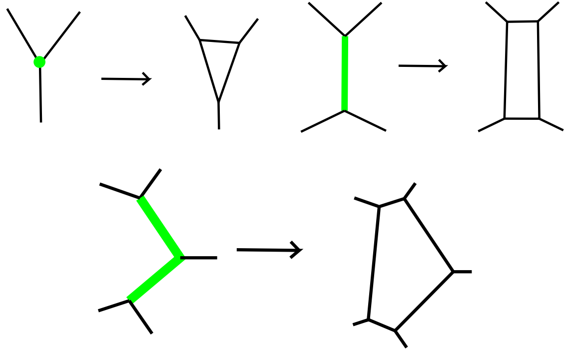
Эти многогранники были введены в 1937 г. в работе М. Голдберга (Michael Goldberg, 1902-1990). Они называются также многогранниками Голдберга.

Все икосаэдральные многогранники являются фуллеренами.

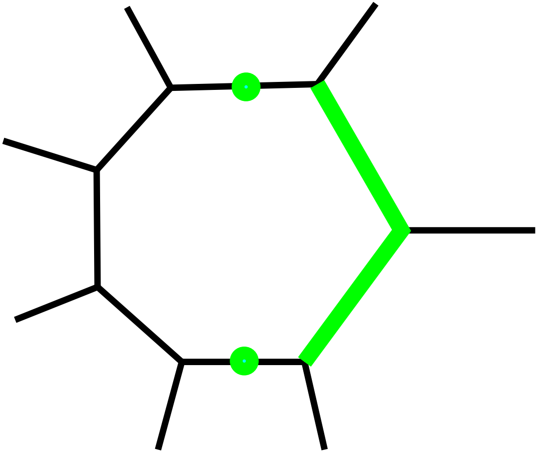
Построение простых трёхмерных многогранников

Теорема (Эберхард (1891), Брюкнер (1900))

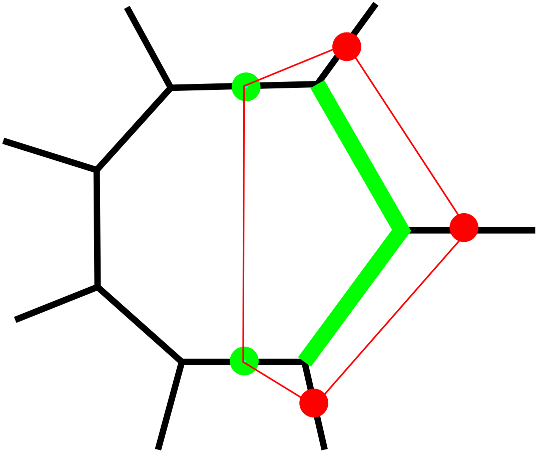
Каждый трёхмерный простой многогранник комбинаторно эквивалентен многограннику, полученному из тетраэдра последовательностью срезок вершин, срезок рёбер и $(2, k)$-усечений.



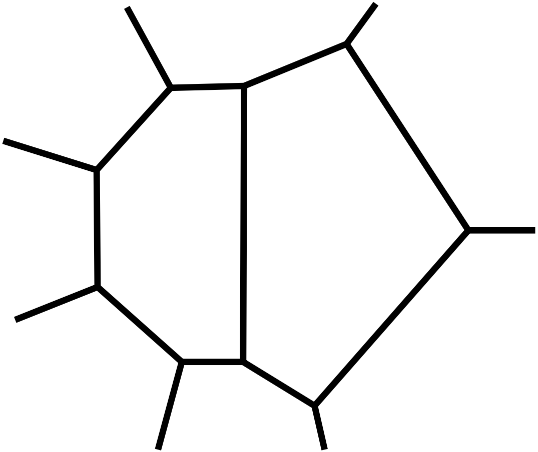
(2, 7)-усечение



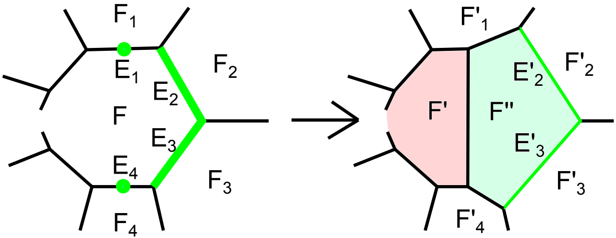
(2, 7)-усечение



$(2, 7)$-усечение



Свойства $(2, k)$-усечения



$(2, k)$-усечение – $(2, k; s_1, s_4)$-усечение – локальная операция.

- k-угольник F распадается на $(k-1)$-угольник F' и 5-угольник F'';
- каждое из рёбер E_1 и E_4 разделяется точкой на два ребра;
- число сторон граней F_1 и F_4 увеличивается на 1.
- комбинаторика граней F_2 и F_3 не изменяется.

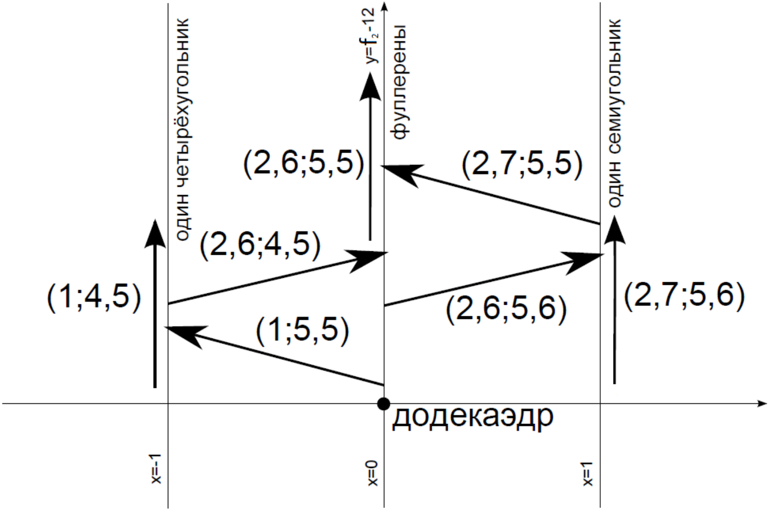
Построение комбинаторных фуллеренов

Теорема(Бухштабер-Ероховец, 2015)

Каждый фуллерен комбинаторно эквивалентен многограннику, получаемому из додекаэдра при помощи последовательности следующих операций усечений:

- $(1; 4, 5)$, $(1; 5, 5)$;
- $(2, 6; 4, 5)$, $(2, 6; 5, 5)$, $(2, 6; 5, 6)$;
- $(2, 7; 5, 5)$, $(2, 7; 5, 6)$.

Схема операций усечений



Семейство фуллеренов, определяемых додекаэдром

$$\Phi = \{\Phi_q, q = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Φ_0 — додекаэдр, $f_0 = 20$, $p_6 = 0$.
Φ_q получается из додекаэдра вставкой между его двумя половинами q поясов из 6-угольников, $f_0 = 20 + 10q$, $p_6 = 5q$.

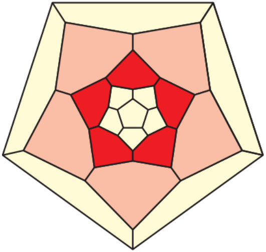


Диаграмма Шлегеля фуллерена Φ_2.

Конструкция фуллеренов

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех простых 3-многогранников и $\mathcal{F}$ — множество всех фуллеренов. Положим:
$\Phi^{\perp} = \mathcal{F} \setminus \Phi$.
$\mathcal{P}_I = \{P \in \mathcal{P} : p_i(P) = 0, i \notin I\}$.
$\mathcal{F}_7 = \{P \in \mathcal{P}_{\{5,6,7\}} : p_7 = 1$ и 7-угольник смежен с 5-угольником $\}$.

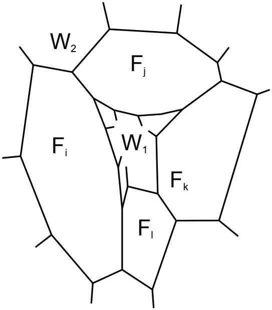
Теорема (В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, 2017)

1. Никакой фуллерен в Φ не может быть получен из многогранника без 4-угольников при помощи $(2, k)$-усечения.
2. Любой фуллерен $P \in \Phi^{\perp}$ получается из 6-бочки при помощи $p_6(P) - 2$ операций $(2, 6; 5, 5)$-, $(2, 6; 5, 6)$-, $(2, 7; 5, 6)$-, $(2, 7; 5, 5)$-усечения, так что каждый промежуточный многогранник принадлежит семейству $\Phi^{\perp} \sqcup \mathcal{F}_7$.

Пусть P простой выпуклый 3-многогранник.

Определение

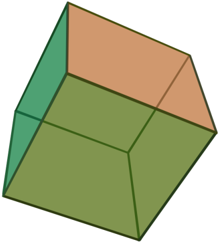
k-поясом многогранника P называется циклическая последовательность его гиперграней $(F_{j_1}, \ldots, F_{j_k})$, такая, что $F_{i_{j_1}} \cap \cdots \cap F_{i_{j_r}} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{i_1, \ldots, i_r\} \in \{\{1,2\}, \ldots, \{k-1, k\}, \{k, 1\}\}$.



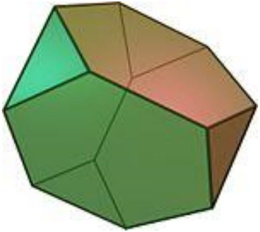
4-пояс простого 3-многогранника.

Флаговые многогранники

Простой многогранник называется флаговым, если любое множество попарно пересекающихся граней $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$: $F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, $s, t = 1, \dots, k$, имеет непустое пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$.



Флаговый многогранник



Нефлаговый многогранник

Простой 3-многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда $P \neq \Delta^3$ и P не содержит 3-поясов.

Задачи

Задача

Построить пример многогранника, который имеет 3-пояс (т.е. не является флаговым), но не содержит треугольных граней.

Задача

Построить пример многогранника, который имеет 4-пояс, но не содержит 4-угольных граней.

Прямоугольные многогранники

Определение

Простой 3-многогранник P будем называть прямоугольным, если он обладает ограниченной реализацией в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$, такой, что все её двугранные углы прямые.

Многогранники Погорелова

Многогранником Погорелова называется простой флаговый 3-многогранник без 4-поясов.

Теорема (А.В. Погорелов (1967), Е.М. Андреев (1970))

Класс многогранников Погорелова совпадает с классом прямоугольных многогранников.

Реализация многогранника Погорелова в $\mathbb{L}^3$ однозначно определена с точностью до изометрии.

Прямоугольная группа Кокстера

Пусть P — прямоугольный многогранник с m гипергранями. Обозначим через $G(P)$ группу, порождённую отражениями пространства $\mathbb{L}^3$ относительно гиперграней $\{F_1, \ldots, F_m\}$ многогранника P.

Группа $G(P)$ является прямоугольной группой Кокстера (Coxeter) ($\mathcal{R}C(P)$) и задаётся следующим представлением:

$$\mathcal{R}C(P) = \langle g_1, \ldots, g_m | g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i \text{ если } F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle,$$

где g_i соответствует отражению относительно гиперграни F_i.

Группа G(P) действует на $\mathbb{L}^3$ дискретно с конечными изотропными подгруппами и фундаментальной областью P.

Лемма

Пусть $\phi : \mathrm{G(P)} \to \mathbb{Z}_2^3$ — эпиморфизм. Подгруппа $\mathrm{Ker}\phi \subset \mathrm{G(P)}$ не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда все векторы $\phi(\mathrm{g}_{\mathrm{i}_\mathrm{k}})$ для гиперграней $\mathrm{F}_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}$, $\mathrm{k} \in \{1, 2, 3\}$, многогранника P, имеющих общую вершину, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^3$.

Подгруппы, действующие свободно на $\mathbb{L}^3$

Следствие

Пусть эпиморфизм ϕ удовлетворяет условию леммы.
Тогда группа $\mathrm{Ker}\phi$ действует свободно на $\mathbb{L}^3$.

Теорема (А.Ю. Веснин, 1987)

Пространство орбит $\mathcal{H}(\mathrm{P};\phi) = \mathbb{L}^3/\mathrm{Ker}\phi$ является компактным гиперболическим 3-многообразием.
Многообразие $\mathcal{H}(\mathrm{P};\phi)$ представляет собой результат склейки $|\mathbb{Z}_2^3| = 2^3$ копий многогранника P и имеет риманову метрику постоянной отрицательной кривизны.

Следствие

Компактное многообразие $\mathcal{H}(\mathrm{P};\phi)$ является асферическим (т.е. пространством Эйленберга-Маклейна $\mathrm{K}(\mathrm{Ker}\phi, 1)$), так как его универсальное накрытие $\mathbb{L}^3$ является стягиваемым.

Нерешённые проблемы

Гипотеза В.И. Арнольда - Тома - Фама

Классифицирующее пространство группы Артина может быть получено как пространство орбит свободного действия соответствующей группы Кокстера на пространстве дополнения к конфигурации гиперплоскостей.

Эта гипотеза связана с известной проблемой алгебраической топологии:

Проблема

Для каких групп $\mathcal{G}$ пространство Эйленберга-Маклейна $K(\mathcal{G}, 1)$ гомотопически эквивалентно компактному CW-комплексу.

В случае групп $G(P)$ прямоугольных многогранников P эта проблема решена.

Приложение теоремы о четырех красках

Пусть P — некоторый простой трехмерный многогранник. Границу ∂P, разбитую на гиперграни $F_1, \ldots, F_m$, можно рассматривать как карту на сфере S^2.

Согласно решению проблемы о четырёх красках,

границу ∂P можно правильно раскрасить в 4 цвета, то есть любые 2 гиперграни, пересекающиеся по ребру, оказываются раскрашенными в разные цвета.

Из условия простоты многогранника P следует, что если $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, то $F_i \cap F_j$ является ребром.

Следствие

При любой правильной раскраске карты ∂P и любой вершины $v_k = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ грани $F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}$ раскрашены в разные цвета.

Правильная раскраска многогранника P задаёт функцию

$$\psi\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to \{1, 2, 3, 4\},$$

где $\psi(F_i) = k$. Здесь k — номер краски, которой раскрашена гипергрань F_i.
Возьмем набор $E = \{e_k \mid k = 1, \ldots, 4\}$ элементов $\mathbb{Z}_2$-векторного пространства $\mathbb{Z}_2^3$, где элементы $e_k, k = 1, 2, 3$ образуют базис этого пространства и $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$.

Любые 3 вектора из набора E образуют базис в $\mathbb{Z}_2^3$.

Пусть P — прямоугольный многогранник. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : \mathrm{G}(\mathrm{P}) \to \mathbb{Z}_2^3$, такой, что $\phi(\mathrm{g_i}) = \psi(\mathrm{F_i})$.

Теорема

Группа $\mathrm{Ker}\phi$ действует свободно на $\mathbb{L}^3$.

Следствие

Для любого прямоугольного многогранника P и его раскраски, задаваемой функцией ψ, определено компактное гиперболическое многообразие $\mathcal{H}(\mathrm{P};\psi)$.

Гиперболические многообразия фуллеренов

Теорема

Каждый фуллерен является многогранником Погорелова.

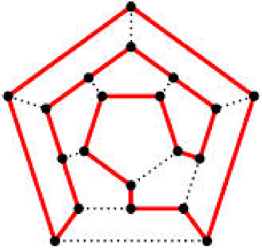
Следствие

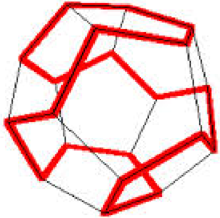
Для каждой раскраски ψ фуллерена P определено гиперболическое многообразие $\mathcal{H}(\mathrm{P};\psi)$.

Гамильтоновым циклом графа называется цикл, проходящий через каждую вершину этого графа один и только один раз.

Теорема (Кардош, 2014)

Рёберный граф любого фуллерена имеет гамильтонов цикл.





Лемма

Гамильтонов цикл на рёберном графе трёхмерного многогранника задаёт правильную раскраску его гиперграней.

Проблема

Найти доказательство теоремы о правильной раскраске границы фуллерена, использующее специфику комбинаторики фуллеренов.

Определение

Две раскраски карт считаются эквивалентными, если они отличаются только перестановкой цветов.

Проблема

Используя описанные выше конструкции фуллеренов, найти число неэквивалентных правильных раскрасок их границ.

W.P. Thurston, Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere, The Epsteub birthday schrift, Geom. Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998, 511-549.

Marjorie Senechal, Editor "Shaping space Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination, 2013.

G. Brinkmann, J. Goedgebeur, B. D. McKay, The generation of fullerenes, Ars Math. Contemp., 11:2 (2016), 353-379.

V.M. Buchstaber, N.Yu. Erokhovets, Construction of families of three-dimensional polytopes, characteristic patches of fullerenes, and Pogorelov polytopes, Izvestiya: Mathematics, 81:5 (2017).

V.M. Buchstaber, N.Yu. Erokhovets, Finite sets of operations sufficient to construct any fullerene from C_{20}, Struct. Chem., 28:1 (2017), 225-234.

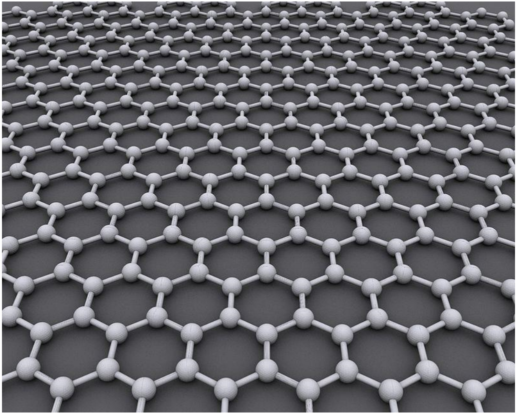
А. Ю. Веснин Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия, УМН, 2017, том 72, выпуск 2(434), 147-190.

Дополнение.

Разбиение плоскости на многогранники и графены

Графен

Плоскость $\mathbb{R}^2$ может быть замощена правильными шестиугольниками.



Схематическое изображение графена.
Узлы – атомы углерода, а рёбра – связи, удерживающие атомы в листе графена.

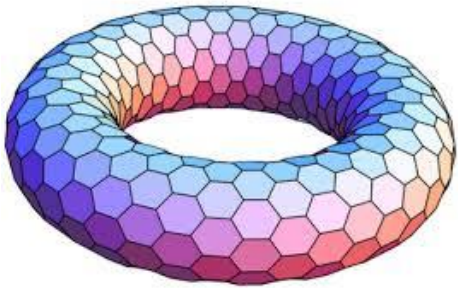
Графен

Графен (англ. graphene) – двумерная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом. Он обладает уникальными электрофизическими свойствами.

В 2010 году А.К. Гейму и К.С. Новосёлову была присуждена Нобелевская премия по физике за «передовые опыты с двумерным материалом — графеном».

Простые разбиения 2-поверхностей

Простое разбиение компактной 2-мерной поверхности M^2 (замкнутой или с границей) на многоугольники определяется вложенным простым графом, таким, что каждая грань является диском, ограниченным простым циклом (т.е. многоугольником), и пересечение любых двух многоугольников либо пусто, либо является общим ребром.



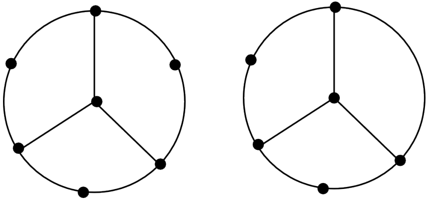
Простые разбиения 2-поверхностей

Любая вершина простого разбиения имеет валентность

- 3, если это внутренняя точка поверхности;
- 2 или 3, если она лежит на границе.

Пусть

- p_k — число k-угольников простого разбиения,
- μ_i — число вершин на границе, имеющих валентность $i = 2, 3$.



$p_4 = 3$
$\mu_2 - \mu_3 = 0$, $\chi(M) = 1$
$2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 + 0$

$p_3 = 1, p_4 = 2$
$\mu_2 - \mu_3 = -1$, $\chi(M) = 1$.
$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 \cdot 1 + 1$

Простые разбиения 2-поверхностей

Положим $\delta = \mu_2 - \mu_3$.

Для любого простого разбиения поверхности M^2

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 6\chi(M^2) - \delta + \sum_{k \geqslant 7}(k-6)p_k.$$

- Не существует простых разбиений замкнутых 2-мерных поверхностей на шестиугольники, если $\chi(M^2) \neq 0$.
- Только тор T^2 и бутылка Клейна K имеют простые разбиения на шестиугольники.

Простые разбиения диска на 5- и 6-угольники

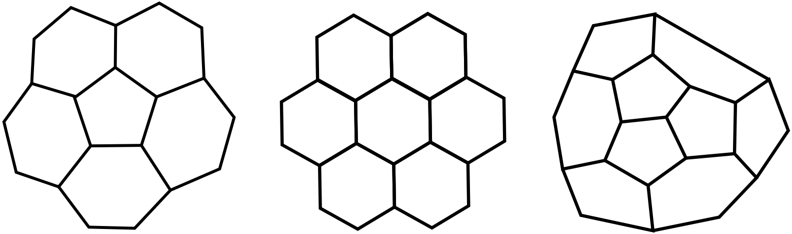
Диском D^2 мы будем считать 2-мерную поверхность, гомеоморфную стандартному диску $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}$.

Имеем $\chi(D^2) = 1$ и формула принимает вид

$$p_5 = 6 - \delta \Longrightarrow -\infty < \delta \leqslant 6$$

- $p_5 = 0 \Leftrightarrow \delta = 6$; $p_5 = 6 \Leftrightarrow \delta = 0$.
- Существуют простые разбиения диска D^2 для произвольных значений p_5 и p_6.

Примеры простых разбиений диска

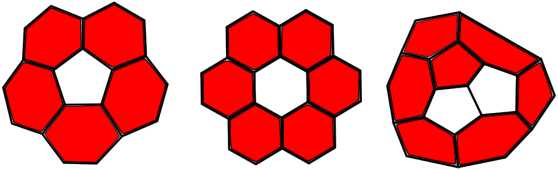


Простые разбиения цилиндра и ленты Мёбиуса на 5- и 6-угольники.

Пусть C – цилиндр или лента Мёбиуса.
Тогда $\chi(C) = 0$ и $p_5 = -\delta \Longrightarrow \delta \leqslant 0$.

Существуют простые разбиения поверхности C для любых значений p_5 и p_6, таких, что

$$p_5 + p_6 \geqslant 3 \Longrightarrow p_6 \geqslant 3 + \delta.$$



Для простых разбиений C на шестиугольники имеем:

- $\mu_2 = \mu_3$;
- $f_0 = \mu_2 + 2p_6$, $f_1 = \mu_2 + 3p_6$, $f_2 = p_6$.

Простые разбиения плоскости на 5- и 6-угольники

Задача

Построить простые разбиения плоскости на 5- и 6-угольники.

Задача

Построить простые разбиения плоскости на 5- и 6-угольники.

Ответ

Это можно сделать тогда и только тогда, когда

$$p_5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Простые разбиения плоскости на k-угольники

Задача

Построить простые разбиения плоскости на k-угольники.

Простые разбиения плоскости на k-угольники

Задача

Построить простые разбиения плоскости на k-угольники.

Ответ

Это можно сделать тогда и только тогда, когда $k \geqslant 6$.

Задача

Построить простые разбиения плоскости на k-угольники.

Ответ

Это можно сделать тогда и только тогда, когда $k \geqslant 6$.

Задача

Построить простые разбиения плоскости на многоугольники с $p_k \neq 0$ только для $k \in \{6, q\}$.

Простые разбиения плоскости

Задача

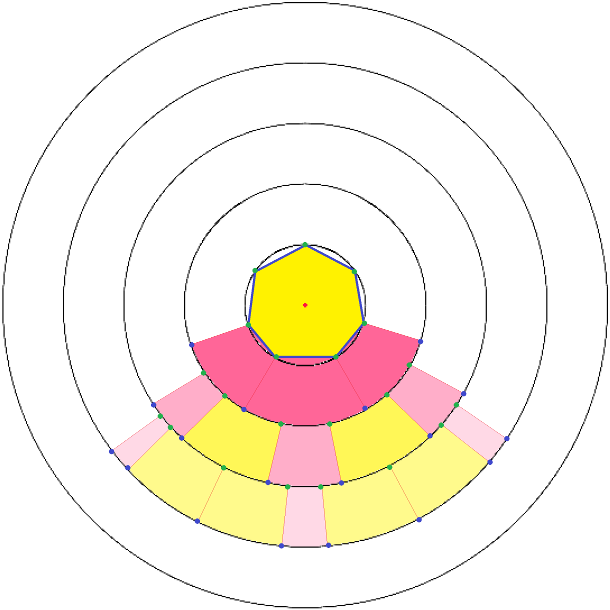
Построить простые разбиения плоскости,
такие, что $p_k \neq 0$ только для

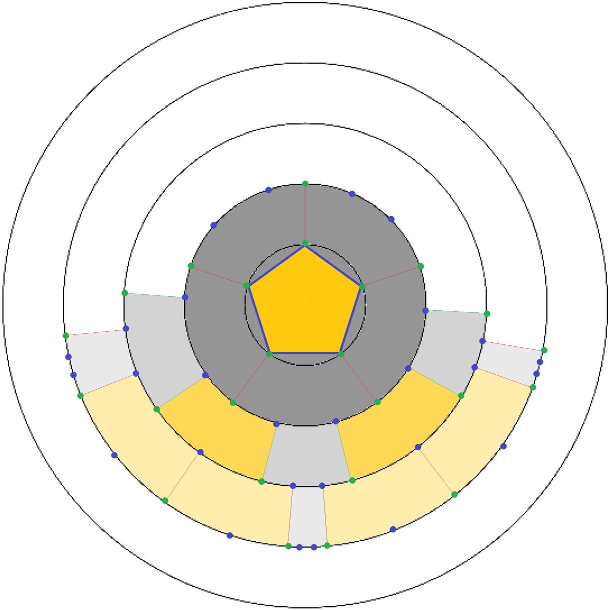
$$k \in \{5, 6, 7\}.$$

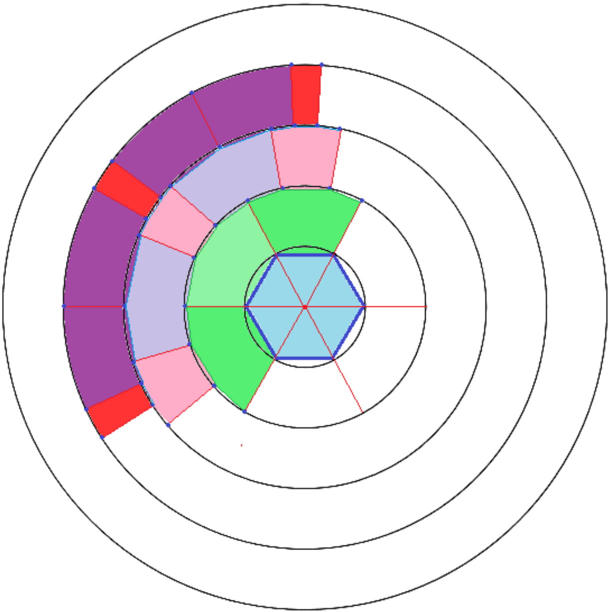
Проблема

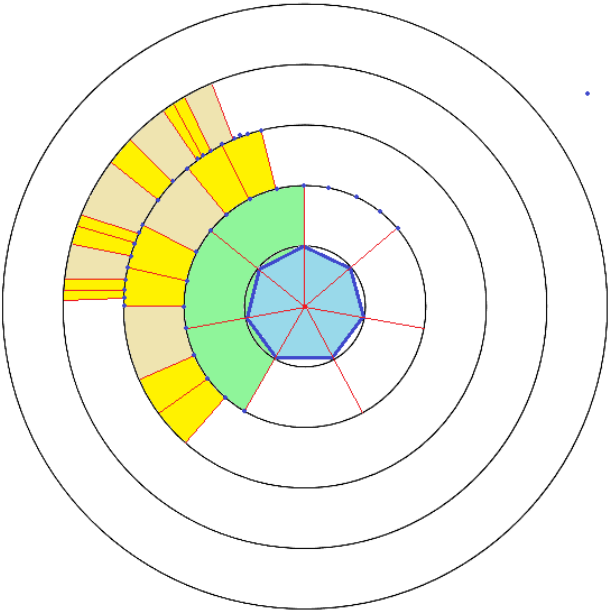
Классифицировать простые разбиения плоскости,
такие, что $p_k \neq 0$ только для

$$k \in \{5, 6, 7\}.$$









Спасибо за внимание!