

Группы Шоттки. Занятие 1: дробно-линейные отображения

Н. Гончарук, Ю. Кудряшов

июль 2015, ЛШСМ, Ратмино

Определение 1. *Сферой Римана* называется множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. При этом точка ∞ считается близкой ко всем точкам z с достаточно большим модулем.

Определение 2. Отображение вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ называется *дробно-линейным*.

Задача 1. Найдите образы и прообразы точек $0, 1, \infty$ при отображениях:

a) $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$;

c) $z \mapsto 2iz$;

b) $z \mapsto z + 1$;

d) $z \mapsto \frac{z}{z+1}$.

Задача 2. Найдите неподвижные точки отображений из предыдущей задачи.

Задача 3. При каких значениях a, b, c, d формула $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ задаёт биекцию $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$?

Задача 4. Когда отображения $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ и $z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ совпадают?

Соглашение 1. Далее мы всюду будем рассматривать только биективные дробно-линейные отображения сферы Римана в себя. Более того, мы будем считать, что коэффициенты масштабированы так, что $ad - bc = 1$.

Задача 5. Сколько неподвижных точек может иметь дробно-линейное отображение $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$?

Задача 6. Для каждого из ответов в предыдущей задаче приведите пример отображения, у которого все неподвижные точки конечные, и пример отображения, у которого одна из неподвижных точек — бесконечность.

Задача 7. Убедитесь, что композиция двух дробно-линейных отображений — снова дробно-линейное отображение. *Комментарий:* если вы вычислили коэффициенты композиции, то заодно могли убедиться, что композиции соответствует произведение матриц.

Определение 3. Если $h: X \rightarrow Y$ — биекция, а $f: Y \rightarrow Y$ — произвольное отображение, то отображение $h \circ f \circ h^{-1}: X \rightarrow X$ называется *сопряжённым* к отображению f . Мы будем рассматривать только случай дробно-линейных отображений f, h .

Задача 8. Докажите, что неподвижные точки $h \circ f \circ h^{-1}$ — образы неподвижных точек отображения f под действием h .

Задача 9. Докажите, что дробно-линейное отображение с двумя неподвижными точками сопряжено отображению вида $z \mapsto \lambda z$.

Задача 10. Докажите, что дробно-линейное отображение с одной неподвижной точкой сопряжено отображению вида $z \mapsto z + 1$.