Листок 1. Коники (а также кубики).

Задача 1. **а)** Параметризуйте окружность $x^2 + y^2 = 1$ с помощью стереографической проекции из точки $(0, 1)$ на ось абсцисс.

б) Найдите все целочисленные решения уравнения $X^2 + Y^2 = Z^2$.

Задача 2. Аналогичным способом найдите все целочисленные решения уравнений:
а) $3X^2 + 4Y^2 = 5Z^2$; **б)** $X^2(X + Z) = Y^2 Z$.

Задача 3. Покажите, что существует ровно четыре коники, проходящие через три точки и касающиеся двух прямых общего положения на $\mathbb{P}^2$.

Задача 4. На лекции было объяснено, что условие «коника касается данной прямой» задает гиперповерхность степени 2 в $\mathbb{P}^5$. Тем самым из теоремы Безу следует, что пяти данных прямых касаются $2^5 = 32$ коники. При этом из проективной двойственности следует, что такая коника только одна. В чем же дело?

Задача 5 (Теорема Шаля). **а)** Пусть $P_1, \ldots, P_8 \in \mathbb{P}^2$ — набор различных точек, никакие четыре из которых не коллинеарны и никакие шесть не конконичны (т.е. не лежат на конике). Найдите размерность пространства кубик, проходящих через $P_1, \ldots, P_8$.

б) Пусть C_1, C_2 — две кубические кривые на $\mathbb{P}^2$ (возможно, вырожденные), пересечение которых состоит из 9 различных точек: $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \ldots, P_9\}$. Докажите, что всякая кубическая кривая, проходящая через $P_1, \ldots, P_8$, проходит и через P_9.

Задача 6* (Для тех, кто знает, что такое групповой закон на кубике). Выведите из предыдущей задачи, что сложение точек на неособой кубической кривой ассоциативно.