Задачи 1

Задача 1.1. а) Если два цикла коммутируют между собой, то либо они не пересекаются, либо один является степенью другого.
б) Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов единственно.

Задача 1.2. Какие перестановки из S_n можно получить из:
а) транспозиций вида $(1,k)$;
б) перестановок $(1,2)$ и $(1,2,\dots,n)$;
в) перестановок вида (i,j,k), если разрешается перемножать их между собой в любом количестве?

Задача 1.3. Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Задача 1.4. Докажите, что в игре «пятнашки» нельзя поменять местами фишки с номерами 14 и 15, не меняя при этом положение остальных фишек.

Задача 1.5. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Как должны действовать мудрецы, чтобы гарантировать результат не менее 999?

Задача 1.6. Каждому из n мудрецов написали на лбу произвольное действительное число и выдали две варежки: чёрную и белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После этого их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки. Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая чёрная — за чёрную? (Мудрец видит все числа, кроме своего; они могут договориться о стратегии до написания чисел на лбу, но не могут общаться после.)

Задача 1.7. Вычислите простые числа Гурвица $h_{3;1^1 4^1}$, $h_{3;1^1 2^1 3^1}$.

Задача 1.8. Вычислите число Гурвица $h_{2;2^2}(3^1 1^1, 3^1 1^1)$.

Задача 1.9. Пусть $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$ — корни n-ой степени из единицы, $\alpha_1 = 1$. Найдите
а) $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; б) $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$; в) $(1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha_n)$.

Задача 1.10. Выразите $\cos n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Задача 1.11. Нарисуйте множества и их образы при отображениях:
а) $\left\{z \,\middle|\, \frac{\pi}{4} < \arg z \le \pi, |z| \le \frac{1}{2}\right\}$, $\{z \,|\operatorname{Re} z = 1\}$, отображение $z \mapsto z^2$;
б) $\{z\,|\operatorname{Im} z = 1\}$, $\left\{z \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 1\right\}$, отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$;
в) $\left\{z \,\middle|\arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$, $\{z\,|0 \le \arg z \le \pi, |z| < 1\}$, отображение $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

Задача 1.12. а) Докажите, что $z \mapsto \frac{1}{\bar z}$ — инверсия с центром в точке 0.
б) В какие множества переводит прямые и окружности отображение $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.
в) Найдите образ множества $\{z\,|\operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.