# Листок 3

**Задача 3.1.** Для однородного пуассоновского процесса $\mathcal{P}$ (с интенсивностью 1) на $[0;+\infty)$ пусть $p_k(x)$ — это вероятность того, что в отрезок $[0;x]$ попало $k$ точек. Докажите, что $p_0(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 1$, $\frac{p_1(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 1$, $\frac{1-p_0(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 1$, $\frac{p_k(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$, для $k \geq 2$.

**Задача 3.2.** Рассмотрим однородный пуассоновский процесс в $\mathbb{R}^2$ (количество точек внутри любой фигуры распределено по пуассоновскому распределению с параметром, равным площади этой фигуры). Найдите распределение расстояния от точки $(0;0)$ из $\mathbb{R}^2$ до ближайшей к ней точки из пуассоновского процесса; найдите математическое ожидание этого расстояния.

**Задача 3.3.** Пусть $\beta(N)$ — произвольная последовательность, стремящаяся к бесконечности. Пусть $A(N)$ — количество натуральных чисел от 1 до $N$, делящихся на квадрат простого числа, большего чем $\beta(N)$. Докажите, что $\lim_{N\to\infty} A(N)/N = 0$.

Пусть $P$ — множество простых чисел.

**Задача 3.4.** Для $s > 1$

а) Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

б) Докажите, что ряд $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ расходится.

Пусть $\Xi := \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ — процесс "ломания палки", и пусть $\tilde{\xi}_1 \geq \tilde{\xi}_2 \geq \ldots$ — это расставленные по убыванию величины $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$.

В лекциях было/будет доказано, что для малого $\Delta t$ и произвольных $t_1, t_2, \ldots, t_k \in [0;1]$ верно:

$$P\left(N_{[t_1;t_1+\Delta t]}(\Xi) = 1, N_{[t_2;t_2+\Delta t]}(\Xi) = 1, \ldots, N_{[t_k;t_k+\Delta t]}(\Xi) = 1\right) = 1_{t_1+\cdots+t_k<1} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Delta t}{t_i},$$

(с точностью до малых более высокого порядка).

Пусть $n$ — равновероятно случайное число между 1 до $N$, и пусть $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ — его разложение на простые множители, причем $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_r$. Мы докажем/доказали, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_k \in [0;1]$ выполнено

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\ln p_1}{\ln N} \leq x_1, \frac{\ln p_2}{\ln N} \leq x_2, \ldots, \frac{\ln p_k}{\ln N} \leq x_k\right) = P\left(\tilde{\xi}_1 \leq x_1, \tilde{\xi}_2 \leq x_2, \ldots, \tilde{\xi}_k \leq x_k\right).$$

**Задача 3.5.** Вычислите вероятности

а) $P(\tilde{\xi}_1 \geq 2/3)$, $P(\tilde{\xi}_1 \geq 1/2)$.

б) $P(\tilde{\xi}_1 \geq 1/3)$.

в) $P(\tilde{\xi}_1 \geq 1/2, \tilde{\xi}_2 \geq 1/3)$.

**Задача 3.6.** *Для любителей повозиться с компьютером.* Проверьте численно результаты предыдущей задачи и теорем курса. Это можно делать

а) Для натуральных чисел: считая долю соответствующих натуральных чисел от 1 до $N$.

б) Для длин циклов случайных перестановок порядка $N$.

в) Смоделировав распределение Пуассона-Дирихле — для этого надо смоделировать $\mathcal{P}\left(t^{-1}\exp(-t)\right)$ и потом отнормировать на сумму полученных точек.

Если будете это делать когда-либо — можно присылать файлы и вопросы на мою почту **alexey.bufetov@gmail.com**.