Листок 2

Пусть $f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ такова, что $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$. Случайная величина η имеет *плотность* $f(x)$, если для любого отрезка $[a;b]$ выполнено $P(\eta \in I) = \int_a^b f(x)dx$. *Математическое ожидание* величины η дается формулой $\mathbf{E}\eta = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$. *Экспоненциальной величиной* называется случайная величина с плотностью $\exp(-x)$.

Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0;1]$.

Задача 2.1. Найдите плотность распределения величин а) u_1, б) $u_1 + u_2$.

Задача 2.2. Найдите математическое ожидание а) u_1, б) экспоненциальной величины, в) $u_1 + u_2$, г) $u_1 u_2$.

Можно считать, что $(u_1, \ldots, u_k)$ — это точка k-мерного куба $[0;1]^k$. В этом случае вероятность событий, зависящих от $u_1, \ldots, u_k$, является объемом соответствующего подмножества k-мерного куба (см. также задачу 1.5 из предыдущего листка), а математическое ожидание какой-либо функции от этих величин — интегралу этой функции по k-мерному кубу.

Задача 2.3. Найдите следующие вероятности а) $P(u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_k)$, б) $P(u_1+u_2+\cdots+u_k \leq 1)$.

Задача 2.4. В деревне Коле приходится ходить за водой к колодцу. Он идет к нему с ведром объема 1, наполняет его целиком, но на обратной дороге расплескивает случайную, равномерно распределенную на $[0;1]$, долю воды из ведра. Дома он выливает принесенную воду в бадью и вновь идет за водой. Сколько в среднем ходок ему придется сделать, чтобы дома оказался объем воды 1 ?

Задача 2.5. Пусть $\xi_1 := u_1$, $\xi_2 := (1-u_1)u_2$, $\ldots$, $\xi_k := (1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_{k-1})u_k$ — *процесс “ломания палки”*. Докажите, что

а) $\sum_{i=1}^k \xi_i \leq 1$ для любых значений u_i.

б) Докажите, что если для какого-то r, $1 \leq r \leq k$, выполнено $u_r \geq 1-\epsilon$, то и $\sum_{i=1}^k \xi_i \geq 1-\epsilon$.

в) Докажите, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено $\lim_{k\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^k \xi_i \geq 1-\epsilon\right) = 1$.

Однородным пуассоновским процессом на $[0;+\infty)$ называется набор случайных точек $\mathcal{P}$, такой что

1) Для непересекающихся множеств I_1, I_2, $\ldots$, I_k случайные величины $N_{I_1}(\mathcal{P})$, $N_{I_2}(\mathcal{P})$, $\ldots$, $N_{I_k}(\mathcal{P})$ независимы. Символом $N_I(\mathcal{P})$ обозначается число точек процесса $\mathcal{P}$, попавших в множество I.

2) Для любого отрезка $[a;b]$ величина $N_{[a;b]}(\mathcal{P})$ имеет распределение Пуассона с параметром $b-a$.

Задача 2.6. Найдите математическое ожидание расстояния от точки 10 до ближайшей к 10 справа точки из $\mathcal{P}$. Найдите математическое ожидание расстояния между двумя соседними точками из $\mathcal{P}$.

Задача 2.7. Пусть $\mathcal{U} := \{u_1, \ldots, u_k\}$. Пусть I_1, I_2, $\ldots$, I_k — непересекающиеся интервалы из $[0;1]$.

а) Найдите вероятность $P\left(N_{I_1}(\mathcal{U}) = m_1, \ldots, N_{I_k}(\mathcal{U}) = m_k\right)$.

б) Найдите условную вероятность $P\left(N_{I_1}(\mathcal{P}) = m_1, \ldots, N_{I_k}(\mathcal{P}) = m_k | N_{[0;1]}(\mathcal{P}) = k\right)$, при условии, что в интервал $[0;1]$ попало ровно k точек из $\mathcal{P}$.

Пусть $g : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ — непрерывная функция. *Неоднородным пуассоновским процессом* с интенсивностью $g(x)$ является набор случайных точек $\mathcal{P}(g)$, отвечающей свойству 1) выше, а также свойству

2’) Для любого отрезка $[a;b]$ величина $N_{[a;b]}(\mathcal{P})$ имеет распределение Пуассона с параметром $\int_a^b g(x)dx$.

Задача 2.8. Придумайте, как свести неоднородный пуассоновский процесс к однородному.

Задачки на этом кончаются, дальше — теория.

Если η — случайная величина с плотностью $p(x)$, то для любой функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\mathbf{E}\phi(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)p(x)dx$. Пусть η — положительная случайная величина; тогда ее распределение однозначно задается ее *преобразованием Лапласа* $\mathcal{L}_\eta(t) := \mathbf{E}\exp(-\eta t)$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Например, преобразование Лапласа экспоненциальной величины вычисляется так:

$$\int_0^\infty \exp(-xt)\exp(-x)dx = \frac{1}{t+1}.$$

Мы хотим понять, как суммировать по пуассоновским процессам. Точнее говоря, мы хотим посчитать распределение суммы $S := \sum_{p \in \mathcal{P}(g)} f(p)$, для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема Кемпбелла. Выполнено

$$\mathbf{E}\exp(-St) = \exp\left(\int_0^{+\infty} g(x)\left(\exp(-tf(x)) - 1\right)dx\right).$$

Несмотря на обилие экспонент, это равенство прекрасно позволяет вычислять распределение величины S.

Доказательство. Для малого Δx можно считать, что в интервал $(x; x+\Delta x)$ попадает либо 0 частиц — с вероятностью $(1-g(x)\Delta x)$, либо 1 частица — с вероятностью $g(x)\Delta x$ — все остальные случаи имеют более высокие порядки малости. Поэтому

$$\mathbf{E}\exp\left(-t \cdot 1_{N_{[x;x+\Delta x]}=1} \cdot x\right) \approx 1(1 - g(x)\Delta x) + \exp(-tf(x))g(x)\Delta x = 1 + g(x)\Delta x\left(\exp(-tf(x)) - 1\right).$$

Поскольку $S \approx \sum_{x=\Delta x, 2\Delta x, \ldots} 1_{N_{[x;x+\Delta x]}=1} \cdot x$, мы имеем,

$$\mathbf{E}\exp(-tS) = \prod_{x=\Delta x, 2\Delta x, \ldots} \left(1 + g(x)\Delta x\left(\exp(-tf(x)) - 1\right)\right) = \exp\left(\sum_x \ln\left(1 + g(x)\Delta x\left(\exp(-tf(x)) - 1\right)\right)\right) \approx$$

$$\approx \exp\left(\sum_x g(x)\Delta x\left(\exp(-tf(x)) - 1\right)\right) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \exp\left(\int_0^{+\infty} g(x)\left(\exp(-tf(x)) - 1\right)dx\right).$$

Применим теперь полученную теорему. Нас интересует сумма всех точек в неоднородном пуассоновском процессе с интенсивностью $t^{-1}\exp(-t)$. Для этого надо применить теорему для случая $f(x) = x$, $g(x) = t^{-1}\exp(-t)$. Получаем:

$$\mathbf{E}\exp(-St) = \exp\left(\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x}\left(\exp(-tx) - 1\right)dx\right).$$

Чтобы посчитать интеграл

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x}\left(\exp(-tx) - 1\right)dx,$$

заметим, что $F(0) = 0$ и $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \exp(-x)\exp(-tx)dx = -1/(t+1)$ (дифференцирование интеграла по параметру). Поэтому $F(t) = -\ln(1+t)$, и мы получаем, что

$$\mathbf{E}\exp(-St) = \exp(-\ln(1+t)) = \frac{1}{1+t}.$$

Таким образом, мы посчитали преобразование Лапласа S; получаем, что S — экспоненциальная величина !