Листок 1

Задача 1.1. В турнире по кубковой системе участвуют 2^n спортсменов разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. С какой вероятностью в финале встретятся двое сильнейших ? Варианты жеребьевки равновероятны.

Задача 1.2. Каждый из n пассажиров купил по билету в n-местный автобус. Однако, первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь вошедший пассажир занимает свое место, если оно свободно; иначе он садится на случайное свободное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место ?

Будем обозначать символом $P(A)$ вероятность события A. Пусть ξ — случайная величина. Ее *функция распределения* задается формулой $F_\xi(x) = P(\xi \le x)$, $x \in \mathbb{R}$. *Совместной функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется функция $F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n)$.

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются *независимыми*, если для любых множеств $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ выполнено $P(\xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2) = P(\xi_1 \in I_1)P(\xi_2 \in I_2)$. В частности, для независимых величин выполнено $F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$.

Задача 1.3. Из стандартной колоды из 32 карт вытягивают одну случайную. Являются ли события “вытянутая карта — дама” и “вытянутая карта — пика” независимыми ? А если изначально из колоды выкинули туза бубей ?

Задача 1.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$. Найдите функцию распределения величины $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

Задача 1.5. Два забывчивых нетерпеливых друга договорились встретиться на Красной площади. К сожалению, оба забыли точное время и помнят только, что оно где-то между 16 и 18 часами. Поэтому каждый из них приезжает в случайное время между 16.00 и 18.00, ждет 20 минут и уезжает. С какой вероятностью они все же встретятся ?

Задача 1.6. *Пуассоновской величиной с параметром a* называется случайная величина ξ с распределением

$$P(\xi = k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \qquad a > 0.$$

Докажите, что если ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром a_1, а ξ_2 — распределение Пуассона с параметром a_2, и эти величины независимы, то $\xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $a_1 + a_2$.

Указание. $P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi_1 = i, \xi_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi_1 = i)P(\xi_2 = k - i)$, где в последнем равенстве мы воспользовались независимостью ξ_1 и ξ_2.

Для дискретной случайной величины ξ *математическое ожидание* $\mathbf{E}\xi := \sum_k kP(\xi = k)$, где k пробегает множество принимаемых значений.

Задача 1.7. Докажите, что математическое ожидание пуассоновской величины с параметром a равно a.

Задача 1.8. Найдите асимптотику математического ожидания количества циклов в случайной перестановке n элементов при $n \to \infty$.

Указание. Пусть S_k — случайная величина, равная числу циклов длины k в случайной перестановке. Докажите, что $\mathbf{E}(S_k) = 1/k$. Тогда математическое ожидание общего числа циклов равно $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$.