Математика вокруг проблемы n тел: интегрируемые системы и КАМ-теория

Оля Ромаскевич

Задачи, первая порция

Мы считаем, что все происходит в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ (однако многие результаты можно обобщить и на большие размерности – например, задачи **2.** и **3.**). Вектор $\vec{r}$ задает позицию тела (планеты).

1. Ньютоновская сила притяжения двух тел с массами m и M, находящихся на расстоянии d, равна по модулю $\frac{GmM}{r^2}$. Немного физики: найдите физическую размерность константы G (она называется гравитационной постоянной).

2. *Центральное* силовое поле – это такое векторное поле $\vec{F}$, которое инвариантно относительно группы вращений. Покажите, что это эквивалентно тому, что $\vec{F}(\vec{r}) = \Phi(r)\vec{e}_r$, где $\Phi(r)$ – некоторая вещественнозначная функция, зависящая только от расстояния до центра поля.

3. Силовое поле $\vec{F}$ называется *потенциальным*, если существует такая функция $U(\vec{r})$, называемая *потенциальной энергией*, что $\vec{F} = -\mathrm{grad} U(\vec{r})$. Докажите, что любое центральное поле – потенциально.

4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -x$$
$$\ddot{y} = -y$$

Эта система соответствует гармоническому осциллятору. **a.** Выпишите общее решение этой системы. Какова размерность пространства решений, иначе говоря, сколько начальных условий нужно задать, чтобы задать траектории системы? **b.** Выпишите потенциальную энергию данной задачи и докажите, что поверхности постоянной энергии (помимо одной вырожденной) суть трехмерные сферы в фазовом пространстве. **c.** Покажите, что фазовые траектории – большие круги сферы $\mathbb{S}^3$ (то есть её пересечения с двумерными плоскостями, проходящими через её центр). Заметьте, что трехмерный объект пересекается с двумерным по одномерному, такие чудеса возможны (и типичны!) в четырехмерном пространстве. **d.** Обозначим координаты в фазовом пространстве (x, p, y, q). Здесь $p = \dot{x}, q = \dot{y}$. Рассмотрим отображение фазового пространства

$$(x, p, y, q) \mapsto \frac{x + ip}{y + iq}$$

определенное на трехмерной сфере, являющейся поверхностью уровня. Оно отображает сферу на комплексную плоскость с добавленной бесконечноудаленной точкой. Покажите, что прообраз любой точки $w \in \bar{\mathbb{C}}$ есть фазовая кривая.

Замечание 1. Заметьте, что в этой конструкции естественно возникает расслоение Хопфа трехмерной сферы над двумерной. Для этого, конечно, нужно знать, что такое расслоение Хопфа. Если что - обращайтесь.

5. Рассмотрите некоторое обобщение системы из задачи **4.**, а именно систему

$$\ddot{x} = -x$$
$$\ddot{y} = -w^2 y$$

a. При каких w траектории системы будут замкнуты? (в этом случае траектории называются *фигурами Лиссажу*) **b.**Что будет происходить с траекториями при других значениях w? **c.** Докажите, что фигуры Лиссажу являются алгебраическими кривыми.

6. При движении в центральном поле выполнен закон сохранения кинетического момента: $\vec{M} = [\dot{\vec{r}}, \vec{r}] = \mathrm{const}$

Запишите этот закон в полярных координатах на плоскости, порожденной векторами $\vec{r}$ и $\dot{\vec{r}}$, в которой происходит движение.

7. Кривая скоростей для движения в поле Ньютона есть окружность в случае, если траектории – эллипсы. Рассмотрите случай гиперболы и параболы.

8. Завершите доказательство теоремы Бертрана об уникальности ньютоновского и осцилляторного потенциалов (см. книгу Арнольда *Математические методы классической механики*, там это доказательство разбито на последовательный список задач).

9. Пусть известно, что период на эллиптической орбите зависит только от значения большой полуоси. Выведите третий закон Кеплера $T \sim a^{\frac{3}{2}}$, исходя из соображений размерности. Для этого докажите, что в центральном поле с однородным потенциалом степени a, то есть таким, что $U(\alpha r) = \alpha^a U(r)$ кривые, гомотетичные орбитам, также являются орбитами. Сравните периоды орбит $r(t)$ и $\alpha r(t)$.

Ищите меня для обсуждений (или если непонятны какие-то условия) в комнате 217б или вокруг пинг-понговых столов. Ещё я готова показывать и объяснять мультики про расслоение Хопфа, как en tête-à-tête, так и инициативным группам. Если что-то (или даже всё) осталось непонятно в первой лекции, ищите меня, я что-то (или даже всё) терпеливо объясню!