# Задачи к курсу В. А. Клепцына

**Определение 1.** *Динамическая система с дискретным временем* — это пара $(X, f)$ из множества $X$ и отображения $f : X \to X$. *Траекторией*, или *орбитой* точки $x \in X$ называется последовательность[1] её итераций $x_k = f^k(x)$ .

Зачастую, на множество и отображение накладываются дополнительные ограничения: так, обычно, если на $X$ есть естественное расстояние, то отображение $f$ предполагается непрерывным. С другой стороны, иногда рассматривают не отображение из множества $X$ в себя, а из множества $X$ в другое, пересекающееся, но не совпадающее с ним множество $Y$. В этом случае мы можем следить за траекторией только до того момента, пока она остаётся в $X$.

**Задача 1.** Пусть $f$ — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя, $f(0) = 0$, и $\forall x > 0 \quad f(x) < x$. Докажите, что

$$\forall x_0 \in [0,1] \quad f^k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

**Определение 2.** Точка $x_0 \in X$ называется *неподвижной*, если $f(x_0) = x_0$. Неподвижная точка называется *притягивающей*, если к ней стремятся орбиты всех близких точек. Неподвижная точка называется *отталкивающей*, если некоторую её окрестность покидают все, сколь угодно близкие к ней (но отличные от неё), точки:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0), \quad x \neq x_0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : \quad f^k(x) \notin U_\varepsilon(x_0).$$

**Задача 2.** Дайте определение периодической точки. Когда её нужно называть притягивающей? Отталкивающей?

**Задача 3.** а) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $f(0) = 0$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ для всех $x$ с $0 < |x| < \varepsilon$ выполнено $|f(x)| < |x|$. Докажите, что неподвижная точка 0 — притягивающая:

$$\forall x_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad f^k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

б) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $f(0) = 0$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ для всех $x$ с $0 < |x| < \varepsilon$ выполнено $|f(x)| > |x|$. Докажите, что неподвижная точка 0 — отталкивающая.
в) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $f(x) = \lambda x + \dots$. При каких $\lambda$ что можно сказать о неподвижной точке 0?

**Задача 4.** а) Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — монотонно возрастающее непрерывное отображение. Докажите, что

$$\forall x \in [0,1] \quad \exists x_* : \quad f^k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} x_*, \quad f(x_*) = x_*.$$

Что можно сказать о последовательности обратных итераций, $f^{-k}(x)$?

**Задача 5.** а) Пусть $f_\varepsilon(x) = x + x^2 - \varepsilon$. Как будет выглядеть в окрестности точки $x = 0$ последовательность итераций $f_\varepsilon$ при различных малых $\varepsilon$? Что происходит при $\varepsilon = 0$?
**Подсказка:** Найдите все неподвижные точки $f_\varepsilon$.
б) Пусть $f_{a,b}(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \dots$. Как будет выглядеть в окрестности точки $x = 0$ последовательность итераций $f_{a,b}$ при различных (типичных) $a, b$? При каких $a, b$ можно гарантировать, что точка $x = 0$ будет притягивающей? Отталкивающей?
**Подсказка:** запишите, как будет выглядеть $f^2_{a,b}$. Что можно сказать об этом отображении?

**Задача 6.** Пусть $f_\varepsilon(x) = c_1(\varepsilon)x + c_2(\varepsilon)x^2 + c_3(\varepsilon)x^3 + \dots$, причём $c_1(\varepsilon_0) = -1$, $c_1'(\varepsilon_0) \neq 0$. Опишите *типичные* (без дополнительных условий типа равенства) сценарии бифуркации при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

**Указания:** 1) Сделайте замену параметра: $\lambda = c_1(\varepsilon)$. Почему это возможно?
2) Посмотрите на предыдущую задачу.

---

[1] Иногда, допуская перегрузку термина, эту же последовательность рассматривают как просто множество её элементов.