Первое задание по «Математической статистике»

1. Двое условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу каждым выбирается "наудачу" и независимо от другого в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

2. Пусть в классе 30 учеников. С какой вероятностью найдутся хотя бы двое учеников, у которых дни рождения в один день? Считается, что каждый ученик независимо от остальных может иметь с равной вероятностью день рождения в один из дней в году (365дней).

3. Имеется монетка (несимметричная). Несимметричность монетки заключается в том, что либо орел выпадает в два раза чаще решки; либо наоборот, априорно (до проведения опытов) оба варианта считаются равновероятными. Монетку бросили 10 раз. Орел выпал 7 раз. Определите апостериорную вероятность того, что орел выпадает в два раза чаще решки. Апостериорная вероятность считается с учетом проведенных опытов, иначе говоря, это просто условная вероятность.

4. Поверхность некоторой шарообразной планеты состоит из океана и суши (множество мелких островков). Суша занимает больше половины площади планеты. На планету хочет совершить посадку космический корабль, сконструированный так, что концы всех шести его ножек лежат на поверхности планеты. Посадка окажется успешной, если не меньше четырех ножек из шести окажутся на суше. Возможна ли успешная посадка корабля на планету?
Указание. Обратим внимание на то, что ответ не зависит от того, какое именно множество представляет собой суша, и как располагаются шесть ножек корабля, на которые он совершает посадку. Эта задача, на первый взгляд, кажется, не имеет ничего общего с теорией вероятностей. Однако метод ее решения базируется на введении вероятностных объектов и использовании двух простых фактов: 1) линейности математического ожидания (независимость слагаемых не нужна), 2) если математическое ожидание с.в. больше какого то числа, то существует исход (точнее говоря исходы, вероятностная мера которых больше нуля) такой, что с.в. принимает на этом исходе значение больше упомянутого числа).

5. а) Докажите неравенство Маркова: $P\left(Y \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{EY}{\varepsilon}$, $Y \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

б) Получите из неравенства Маркова неравенство Чебышёва: $P\left(\left|Y - EY\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{DY}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$.

в) Пусть X_i, $i = 1,\dots,n$ – независимые случайные величины, такие что

$$X_i = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & 1-p; \end{cases} \text{ (схема испытаний Бернулли).}$$

С помощью неравенства Чебышева получите: $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$.

6. Предложите эффективный способ вычисления с заданной точностью ε и с заданной доверительной вероятностью γ интеграла: $J = \int\limits_{[0,1]^m} f\left(\vec{x}\right) d\vec{x}$. Считайте, что $\left|f\left(\vec{x}\right)\right| \leq 1$.

Пояснение. Введем случайный m-вектор $\vec{X} \in R\left(\left[0,1\right]^m\right)$ и с.в. $\xi = f\left(\vec{X}\right)$. Тогда $M\xi = \int\limits_{[0,1]^m} f\left(\vec{x}\right) d\vec{x} = J$. Поэтому получаем оценку интеграла $\bar{J}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\vec{x}^k\right)$, где $\vec{x}^k$, $k = 1,\dots,n$ –

повторная выборка значений случайного вектора $\vec{X}$ (т.е. все $\vec{x}^k$, $k = 1,...,n$ – независимы и одинаково распределены: также как и вектор $\vec{X}$). В задаче требуется оценить сверху число n ($n \gg m$), начиная с которого $P\left(\left|J - \bar{J}_n\right| \le \varepsilon\right) \ge \gamma$.

7. В некотором Вузе проходит экзамен. Количество экзаменационных билетов $N \gg 1$. Перед экзаменационной аудиторией выстроилась очередь из студентов, которые не знают чему равно N. Согласно этой очереди студенты вызываются на экзамен. Второй студент заходит в аудиторию, после того как из нее выйдет первый и т.д. Каждый студент с равной вероятностью может выбрать любой из N билетов (независимо от других студентов). Проэкзаменованные студенты, выходя из аудитории, сообщают оставшейся очереди номера своих билетов. Оцените (сверху) сколько студентов должно быть проэкзаменовано, чтобы оставшаяся к этому моменту очередь смогла оценить число экзаменационных билетов с точностью 5% с вероятностью не меньшей 0.95.

8. В тесто для выпечки булок с изюмом замешано N изюмин. Всего из данного теста выпечено K булок. Оцените вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин равно k. Считайте, что $N \gg 1$, $K \gg 1$, $N/K = \lambda$.

9. В поселке N жителей, каждый из которых в среднем n раз в месяц ездит в город, выбирая дни поездки независимо от остальных. Автобус из поселка в город идет один раз в сутки. Какова должна быть вместимость автобуса для того, чтобы он переполнился с вероятностью, не превышающей заданного числа β?

10. Пусть есть группа из n человек ($n \gg 1$), каждый из них может быть потенциально болен. Для выявления болезни человеку делают анализ крови.

Методика: смешиваются пробы крови k человек и анализируется полученная смесь. Если антител нет, то одной проверки достаточно для k человек. В противном случае кровь каждого человека нужно исследовать отдельно, и для k человек всего потребуется $k+1$ раз провести анализ.

Вероятностная модель: Предположим, что вероятность обнаружения антител p ($p \ll 1$) одна и та же для всех n обследуемых, и результаты анализов для различных людей независимы, т.е. моделью является последовательность из n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p.

Покажите, что предложенная методика позволяет выявить всех больных при числе проверок (анализов) в среднем в несколько раз меньшем, чем общее число людей.

Указание: Определите размер группы $k_0 = k_0(p)$, минимизирующий среднее число проверок. Покажите, что если $p = 0.01$, то в среднем потребуется приблизительно в пять раз меньше проверок, чем общее число людей.

11.* Имеется два “одноруких бандита” (так называют игровые автоматы с ручкой, дергая за которую получаем случайный выигрыш). Вероятность выиграть на первом автомате $p_1 > 0$, а на втором $p_2 > 0$. Обе вероятности неизвестны. Игрок может в любом порядке $n \gg 1$ раз дергать за ручки “одноруких бандитов”. Стратегией игрока является выбор ручки на каждом шаге, в зависимости от результатов всех предыдущих шагов. Как стоит действовать игроку, чтобы суммарный выигрыш был бы максимальным? Выигрышем является сумма выигрышей во всех n розыгрышах.