ЗАНЯТИЕ 2

Соглашение. Термин кривая *на этом занятии означает* плоская комплексная алгебраическая кривая.

Задача 1. Выведите из теоремы Безу для кривых, что приводимая проективная кривая не может быть гладкой.

1. Условия Коши–Римана

Пусть $f : U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Определим

$$f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}.$$

Задача 2. Докажите, что стандартные формулы дифференцирования выполняются и в комплексном случае.

Задача 3. В каких точках дифференцируемы $\bar{z}$, $|z|^2$?

Предложение 1. *Пусть $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(x+iy) & -\operatorname{Im} f'(x+iy) \\ \operatorname{Im} f'(x+iy) & \operatorname{Re} f'(x+iy) \end{pmatrix}.$$

Следствие 0.1. *Определитель матрицы Якоби отображения*

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

— положителен.

Предложение 2 (Условия Коши–Римана)**.** *Пусть $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ вещественно дифференцируема в в точке $z = x+iy$. Она является комплексно дифференцируемой тогда и только тогда, когда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.*

Заметим, что эти условия равносильны тому, что дифференциал функции f есть поворотная гомотетия.

Доказательство. Часть "только тогда" следует из предыдущего предложения. Обратно, если условия выполнены, то дифференциал отображения в точке есть умножение на некоторое комплексное число a, ибо каждая поворотная гомотетия есть умножение на комплексное число. Но тогда

$$f(z+w) = f(z) + aw + o(w).$$

$\square$

2. Многообразия

Пусть M — топологическое пространство. *Атласом размерности* d на M мы будем называть открытое покрытие $M = \cup_\alpha U_\alpha$ с гомеоморфизмами $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где V_α — открытые подмножества в $\mathbb{R}^d$. При этом для любых α, β возникает отображение

$$t_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Атлас называется *гладким*, если все отображения $t_{\alpha\beta}$ гладкие. Гладкий атлас называется *ориентированным*, если определители матриц Якоби отображений $t_{\alpha\beta}$ положительны[1]. Мы всегда будем предполагать атласы не более, чем счетными.

Два гладких атласа называются *эквивалентными*, если их объединение — гладкий атлас. Аналогично определяется эквивалентность для ориентируемых атласов. *Гладким многообразием* размерности d называется хаусдорфово топологическое пространство с классом эквивалентности атласов размерности d. Аналогично определяется *ориентированное многообразие.*

Заменяя $V_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ на $V_\alpha \subset \mathbb{C}^d$, а гладкие функции на комплексно дифференцируемые, получаем определение комплексного многообразия. Ясно, что комплексное многообразие размерности d можно рассматривать, как вещественное многообразие размерности $2d$. Из следствия 0.1 следует, что все комплексные многообразия размерности один суть гладкие ориентированные многообразия размерности 2. (На самом деле комплексные многообразия любой размерности являются ориентированными гладкими многообразиями.)

Предложение 3. *Гладкая кривая есть комплексное многообразие размерности 1.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $f(z_1, z_2) = 0$. Мы утверждаем, что любая ее точка имеет окрестность, в которой одно из отображений $(z_1, z_2) \mapsto z_i$ есть гомеоморфизм на образ. Положим

$$f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial y_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial y_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial z_1} & -\operatorname{Im} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial z_2} & -\operatorname{Im} \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \operatorname{Im} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \operatorname{Im} \frac{\partial f}{\partial z_2} & \operatorname{Re} \frac{\partial f}{\partial z_2} \end{pmatrix}.$$

Обозначим минор этой матрицы, состоящий из первых двух столбцов, через A_1, а минор, состоящий из последних двух столбцов, через A_2.

Пусть в рассматриваемой точке $\frac{\partial f}{\partial z_i} \neq 0$. Тогда минор A_i невырожден. Теперь из теоремы о неявной функции следует, что z_i есть локальная координата на кривой. Это позволяет построить атлас в котором все отображения ϕ_α — проекции на координатные оси.

[1] Заметим, что эти определители не могут обращаться в ноль.

Осталось доказать, что любая функция перехода $t = t_{\alpha\beta}$ комплексно дифференцируема (вещественная дифференцируемость следует, опять же, из теоремы о неявной функции). Достаточно рассмотреть случай, когда $\phi_\alpha = z_1$, а $\phi_\beta = z_2$. Тогда $f(z, t(z))$ тождественно обращается в ноль. Запишем это равенство в вещественных координатах, пусть $t(x + iy) = r(x, y) + is(x, y)$. Тогда

$$u(x, y, r(x, y), s(x, y)) = 0$$
$$v(x, y, r(x, y), s(x, y)) = 0.$$

Дифференцируя эти равенства получаем матричное равенство

$$-A_1 = BA_2,$$

где B — дифференциал $t(z)$. Так как A_i — операторы поворотных гомотетий, B — тоже поворотная гомотетия и остается использовать предложение 2. □

Предложение 4. *Проективная кривая компактна (как топологическое пространство).*

3. Эйлерова характеристика

Мы видим, что гладкая проективная кривая есть компактное гладкое двумерное ориентированное многообразие. Значит ее компоненты связности суть сферы с ручками. Пусть M — гладкое двумерное многообразие. Будем говорить, что $T \subset M$ *треугольник*, если для некоторого атласа на M и некоторого отображения ϕ_α, входящего в этот атлас, $\phi_\alpha(T)$ — треугольник. Пусть M триангулировано. Напомним, что эйлеровой характеристикой многообразия M называется величина

$$(\text{число вершин}) - (\text{число сторон}) + (\text{число треугольников}),$$

которая не зависит от триангуляции. Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$.

Предложение 5. *Эйлерова характеристика кривой $X^n + Y^n = Z^n$ равна $3n - n^2$.*

Доказательство. Обозначим нашу кривую через C и рассмотрим отображение $C \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ заданное формулой $(X : Y : Z) \mapsto (X : Z)$. Ясно, что оно корректно определено. Пусть $\zeta = \cos(2\pi i/n) + i\sin(2\pi i/n)$. Нетрудно видеть, что каждая из n точек $y_k = (\zeta^k : 1)$ имеет ровно один прообраз, а остальные точки — по n прообразов.

Триангулируем $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ так, чтобы точки y_i были среди вершин триангуляции. Мы требуем, чтобы треугольники были достаточно маленькими в смысле следующей леммы.

Лемма 1. *Прообраз достаточно маленького треугольника есть объединение n треугольников. При этом, если среди вершин исходного треугольника нет* *точек y_i, то эти n треугольников не пересекаются, иначе — пересекаются по одной общей вершине.*

Обозначим числа вершин, сторон и треугольников в нашей триангуляции через V, S и T соответственно. Расмотрим прообразы треугольников нашей триангуляции в C. Согласно лемме, мы получим триангуляцию многообразия C, в которой nS сторон и nT треугольников. Так как все точки y_i присутствуют в исходной триангуляции, триангуляция кривой C будет иметь $n(V-n)+n$ вершин. Имеем

$$\chi(C) = (n(V-n)+n) - nS + nT = n(V-S+T) - n^2 + n = 3n - n^2.$$

$\square$