ЗАНЯТИЕ 1

1. Плоские кривые

Простейшие примеры показывают, что разные многочлены могут иметь одно и то же множество нулей: например, $x^2 + y^2$ и $x^4 + y^4$ задают одно и то же множество. Другой пример: $x + y$ и $(x + y)^2$. В первом примере, эти множества также мало похоже на кривые....

Ситуация улучшается в поле комплексных чисел.

Определение 1. *Плоская комплексная алгебраическая кривая* — это множество, заданное в $\mathbb{C}^2$ уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами. *Степенью* такой кривой называется наименьшая из степеней многочленов f, ее задающих. Кривая называется *неприводимой*, если хотя бы один из задающих ее многочленов неприводим.

Каждая кривая есть объединение неприводимых кривых. Каждая непустая кривая бесконечна — это следует из основной теоремы алгебры.

Теорема 1. *Многочлены f и g от двух переменных с комплексными коэффициентами тогда и только тогда взаимно просты, когда множество решений системы $f(x, y) = g(x, y) = 0$ конечно.*

Пример 1. Пусть $g(x, y) = y - c$.

Следствие 1.1. (a) *Пусть g — неприводим и $g(x, y) = 0$ влечет $f(x, y) = 0$, тогда g делит f.*
(b) *Пусть f и g неприводимы и задают одну и ту же кривую. Тогда они отличаются умножением на константу.*

1.1. Многочлены от одной переменной с коэффициентами в поле.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле. Рассмотрим кольцо $\mathbb{F}[x]$. При помощи алгоритма Евклида доказывается, что для любых двух многочленов $f, g \in \mathbb{F}[x]$ найдутся такие многочлены $a, b \in \mathbb{F}[x]$, что $af + bg$ — наибольший общий делитель многочленов f и g. Из этого выводится факториальность кольца $\mathbb{F}[x]$. Напомним, что кольцо называется *факториальным*, если разложение на неразложимые множители в нем однозначно с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимые элементы.

1.2. Многочлены от двух переменных.

Теорема 2. $\mathbb{C}[x, y]$ *факториально.*

Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}(y)$ — кольцо рациональных функций от одной переменной. Тогда $\mathbb{C}[x, y] \subset \mathbb{F}[x]$.

Набросок доказательства теоремы 2. Достаточно доказать, что если неприводимый многочлен f делит произведение $g_1 g_2$, то он делит один из сомножителей.

Так как $\mathbb{F}[x]$ факториально, f делит один из сомножителей (пусть первый) в $\mathbb{F}[x]$, поэтому мы можем записать

$$h(x,y)f(x,y) = g_1(x,y)\phi(y), \tag{1}$$

где h и ϕ — многочлены.

Пусть

$$a(x,y) = a_0(y) + a_1(y)x + \ldots + a_n(y)x^n$$

многочлен. Опеределим $cont(a)$ как наибольший общий делитель многочленов $a_0(y)$, $a_1(y)$,…, $a_n(y)$.

Задача 1. Докажите, что $cont(a) = cont(b) = 1$ влечет $cont(ab) = 1$. Выведите, что для любых многочленов $cont(ab) = cont(a)\, cont(b)$.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство. Из (1) следует, что

$$cont(h) = cont(g_1)\phi.$$

Значит, ϕ делит h и на него можно разделить обе части. □

Задача 2. Докажите, что факториальность кольца A влечет факториальность кольца $A[x]$. Выведите факториальность кольца $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказательство теоремы 1. Найдутся такие $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, что $\alpha f + \beta g = \gamma$, где γ — наибольший общий делитель f и g в $\mathbb{F}[x]$. Умножая на общий знаменатель, можно считать, что $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x, y]$.

Случай 1: $\gamma \in \mathbb{C}[y]$. В этом случае, все точки пересечения $f = 0$ и $g = 0$ лежат на прямых $y = y_i$, где y_i — корни многочлена γ. Пусть таких точек бесконечно много. Так как этих прямых конечное число, то для некоторого i кривые $f = 0$ и $g = 0$ пересекаются с прямой $y = y_i$ по бесконечному множеству точек. Но тогда, в силу примера 1, $y - y_i$ делит f и g.

Случай 2: $\gamma \notin \mathbb{C}[y]$. Напомним, что γ делит f и g в $\mathbb{F}$. Пусть δ — такой неприводимый делитель многочлена γ, что $\delta \notin \mathbb{C}[y]$. Тогда δ так же делит f и g в $\mathbb{F}$. Но это значит, что найдутся такие $\phi, \psi \in \mathbb{C}[y]$, что $\delta|\phi f$, $\delta|\phi g$. Но ясно, что $\delta \not| \phi$. Значит, по теореме 2 $\delta|f$ и $\delta|g$.

Более прямое доказательство следует из того, что $cont(\delta)$ делит $\phi\, cont(g)$. □

2. Проективные кривые

Проективная плоскость $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ определяется как множество наборов $(X_0 : X_1 : \ldots : X_n)$, где $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ и наборы, получающиеся друг из друга умножением на ненулевой скаляр, считаются эквивалентными. Иначе говоря, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ — множество прямых в $\mathbb{F}^{n+1}$. Имеем

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}^{n-1} \sqcup \ldots \mathbb{F}^1 \sqcup \mathbb{F}^0.$$

Уравнение $F(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0$ задает некоторое множество в $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$, если оно *однородно*. Такое множество называется *кривой*. Например, $x^2 + y^2 = 1$ есть пересечение $X^2 + Y^2 = Z^2$ с $\mathbb{F}^2$.

Задача 3. Классифицируйте квадрики (то есть поверхности, заданные однородным уравнением второй степени) в $\mathbb{P}^n$.

Пример 2. Две квадрики в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ пересекаются ровно в четырех точках или имеют общую компоненту, если точки пересечения считать с кратностями. Это утверждение не верно, ни в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, ни в $\mathbb{C}^2$. Более общо, кривые степени m и n пересекаются ровно в mn точках, если считать с кратностями. Это утверждение называется *теоремой Безу*.

3. Неособые кривые

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Запишем
$$f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n.$$
Определим $f'(x)$ формально. Далее, для $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ можно определить частные производные.

Пусть $f(x_0, y_0) = 0$. Кривая $f(x, y) = 0$ называется *гладкой в точке* (x_0, y_0), если $\frac{\partial f}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$ не обращается в нуль в этой точке.

Аналогично, проективная кривая, гладкая в своей точке $(X : Y : Z)$ если одна из производных $\frac{\partial f}{\partial X}$, $\frac{\partial f}{\partial Y}$ или $\frac{\partial f}{\partial Z}$ отлична от нуля.

Задача 4. Докажите, что эти определения согласованы.

Итак, кривая $f(X, Y, Z) = 0$ в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ является *гладкой*, если и только если система
$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial Z} = f = 0$$
не имеет ненулевых решений в $\mathbb{P}^2_{\bar{\mathbb{C}}}$.

Теорема 3. *Гладкая кривая степени n в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ гомеоморфна сфере с $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ ручками.*