1. Теоретический минимум

По определению, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ – это ассоциативная алгебра с единицей с образующими E, F, K, K^{-1} и соотношениями

- $KK^{-1} = KK^{-1} = 1$ (это соотношение всего лишь говорит, что K должно быть обратимым элементом),
- $KEK^{-1} = q^2E$,
- $KFK^{-1} = q^{-2}F$,
- $EF - FE = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$.

Здесь q – комплексное число отличное от $0, \pm 1$, так что все соотношения имеют смысл.

Для того, чтобы освоиться с этим определением полезно сделать задачи 1 (хотя бы с $r = 1$), оно превращается в $[E, F^s] = [s]F^{s-1}\frac{Kq^{1-s}-K^{-1}q^{s-1}}{q-q^{-1}}$, и 2 из листка 2.

Замечание, которое в этом курсе не используется: в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ элементы вида $F^{n_1}K^{n_2}E^{n_3}$ с $n_1, n_3 \geqslant 0$ и произвольным целым n_2 являются базисом (базис PBW).

На этой алгебре вводится структура алгебры Хопфа:

$$\Delta(E) = K \otimes E + 1 \otimes E, \Delta(F) = 1 \otimes F + F \otimes K^{-1}, \Delta(K) = K \otimes K,$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \varepsilon(K) = 1, S(E) = -K^{-1}E, S(F) = -FK, S(K) = K^{-1}.$$

Полезное, хотя и нудное, упражнение здесь – это проверка корректности определения Δ, ε, S и того, что они удовлетворяют аксиомам алгебры Хопфа.

2. Обсуждение

Ничего, что сказано ниже не надо воспринимать формально.

Рассмотрим обычную алгебру $U(\mathfrak{sl}_2)$ и положим в ней $E := e, F := f$. Рассмотрим также элемент $K := q^h$, он не вполне лежит в нашей алгебре, ибо такой ряд является бесконечной суммой (на самом деле, правильно писать $q = e^\hbar, K = e^{\hbar h}$, где $\hbar$ – некоторый формальный параметр – “постоянная Планка”; тогда можно указать место жительства для K – алгебра $U(\mathfrak{sl}_2)[[\hbar]]$ формальных рядов с коэффициентами в $U(\mathfrak{sl}_2)$). Элементы E, F, K (строго говоря, живущие в $U(\mathfrak{sl}_2)[[\hbar]]$) удовлетворяют соотношениям $KEK^{-1} = q^2E, KFK^{-1} = q^{-2}F, EF - FE = \frac{d}{d\hbar}K|_{\hbar=0}$.

Квантовая механика предполагает, что мир дискретен (с шагом, грубо говоря, $\hbar$). Поэтому взятие производной по $\hbar$ не имеет смысла. Можно рассмотреть дискретный аналог производной, например $D_\hbar f(x) := \frac{f(x+\hbar)-f(x)}{\hbar}$ (здесь f – просто функция одной переменной). Отметим, что никакого выделенного варианта дискретной производной нет, на ряду с приведенной выше, можно рассмотреть скажем ее симметризованный мультипликативный аналог, $D_q f(x) := \frac{f(qx)-f(q^{-1}x)}{q-q^{-1}}$.

Таким образом, в определении квантовой группы мы просто заменяем обычную непрерывную производную $\frac{d}{d\hbar}e^{\hbar h}|_{\hbar=0}$ на ее дискретный аналог $D_q(x^h)|_{x=1}$.

Кроме того, мы некоторым образом деформируем копроизведение. Отметим, что при специализации $\hbar = 0$ копроизведение в квантовой группе становится копроизведением в $U(\mathfrak{sl}_2)$. Разумного объяснения, почему мы берем именно такое копроизведение нет, более того, есть еще 3 равнозначных копроизведения. Но объяснить можно попытаться так. В q-математике в формулах единица заменяется на степень q (чтобы при специализации $q = 1$ получить единицу обратно). И мы это и делаем: в формуле $\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes 1$ мы заменяем первую единицу на K (которое следует мыслить, как q^h).