Деформационное квантование.

0) Классическая и квант. механика

1) Пуассоновы алгебры

2) Деформации алгебр

3) Квантование как деформация.

0)

	классич. механика	квант. механика
Алг. наблюд.	Пуасс. алг. $A/\mathbb{R}$ (= коммут. ассоц. алг. $+ \{\cdot,\cdot\}$)	Пр-во самосопр. операторов $\hat A$ в гильб. пр-ве
Ур-е эволюции	$\dot f = \{H, f\}$, $H \in A$ - энергия, $f \in A$ - произв. эл-т - ур-е Гамильтона	$\dot F = \frac{i}{\hbar}[\hat H, F]$, $\hat H$ - энергия, $F \in \hat A$ ур-е Гейзенберга

квазикл. предел $\hbar \to 0$

Принцип соотв.:

При $\hbar \to 0$ квантовая мех. система должна становиться классич. — квантование

Пробл: две части очень разные и оба перехода сложные

Деф. подход: $\hat A \rightsquigarrow$ форм. деформ. алгебры A

1) Ньютон. мех. система в $\mathbb{R}^n$: $\ddot x = F(x, \dot x, t)$, $x = (x_1, \ldots x_n)$ - коорд., $F = (F_1, \ldots F_n)$ - вектор ускор-я

Потенц. система (~~...~~) $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $V = V(x_1, \ldots x_n)$ - потенц. $\rightsquigarrow$

$$\ddot x_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\ i = \overline{1,n} \iff [y_i := \dot x_i] \begin{cases} \dot x_i = y_i \\ \dot y_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \end{cases} \iff \left[H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2 + V\right]$$

$$\begin{cases} \dot x_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot y_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$ - ур-е Гамильтона

Заметка: эволюция наблюд. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\dot f = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\dot y_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} = \{H, f\}$$

Опр: скобка Пуассона на $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$: $\{F, G\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial y_i}$.

Алгебр. св-ва (0) $\mathbb{R}$-билинейность

(1) $\{F, G\} = -\{G, H\}$

(2) $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ $(\forall F, G, H)$ - т-во Лейбница

(3) т-во Якоби.

Опр. A - коммут. ассоц. алг. с 1 над полем $\mathbb{F}$. Скобка Пуассона на A: $\{\cdot,\cdot\}$ удовл. 3-ем св-вам ($\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{F}$). $A + \{\cdot,\cdot\}$ - алг. Пуассона

Пример: 1) $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ или $\mathbb{C}[x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n]$ с $\{\cdot,\cdot\}$ как выше

2) $\mathfrak{g}$ - алг. Ли, $A := S(\mathfrak{g})$, $\{x, y\} := [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $\rightsquigarrow$ продолж. на $S(\mathfrak{g})$ с пом. (2).

2) Дано: алг. $A/\mathbb{C}$ Хотим: "деформировать" = "непрер. менять" умнож.

Пример 1: $A=\mathbb{C}^2$, базис $1, x$; умнож. $\circ$: 1 - единица, $x\circ x=0$

деформ. $*_\hbar$: 1 - единица, $x *_\hbar x=\hbar$

$\hbar\in\mathbb{C}$ - парам. деформ.

2: $A=\mathbb{C}[x,y]$; $f *_\hbar g := m\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\hbar/2)^i}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f\otimes g\right)$

$m: A\otimes A\to A$ обычн. умнож.

$\hbar=0$: $f *_0 g = fg$; $f *_\hbar 1 = 1 *_\hbar f = f$; $x *_\hbar x = x^2$, $y *_\hbar y = y^2$

$y *_\hbar x = m\left(y\otimes x+\frac{\hbar}{2}\cancel{(1-0)}(1\otimes 1-0)\right)=yx+\frac{\hbar}{2}$, $x *_\hbar y = xy-\frac{\hbar}{2}$

В примерах: $*_\hbar$ - полином. зав. от $\hbar \rightsquigarrow *_\hbar: A\otimes_{\mathbb{C}} A\to A[\hbar] \rightsquigarrow$ расш. $*_\hbar$ на $A[\hbar]$ по линейн. $\rightsquigarrow \mathbb{C}[\hbar]$-алгебра $A[\hbar]$

Требования к $*_\hbar$: сохраняет ассоц. и 1, но не коммут.

Задача: $*_\hbar$ в прим. 2 ассоц.

[прим. 2]

Надо две модиф.:

a) $\mathbb{C}[\hbar]\rightsquigarrow\mathbb{C}[[\hbar]]$ - форм. ряды ("$\hbar$ очень мало") e.g. $A=C^\infty(\mathbb{R}^2)\rightsquigarrow f *_\hbar g\in C^\infty(\mathbb{R}^2)[[\hbar]]$

б) Выше: деформ. $*_\hbar$ но не A. Более общее опр.:

$A_\hbar$ - форм. деформ-ия A если: $A_\hbar$ - ассоц. алг. с 1 над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ и

(i) $A_\hbar/\hbar A_\hbar = A$ как алгебра

(ii) $\hbar$ не делит. 0 в $A_\hbar$

(iii) $\hbar$-адич. топол. на $A_\hbar$ отделима: $\bigcap_n \hbar^n A_\hbar=\{0\}$ и полна - посл-ть Коши сходится. (маленький = делиц. на больш. степень $\hbar$)

Часто $A_\hbar \simeq_{\mathbb{C}[[\hbar]]} A[[\hbar]]$ но не канон.

Пример 3: $A_\hbar=\mathbb{C}\langle x,y\rangle[[\hbar]]/(yx-xy=\hbar)$

- форм. деформ. $\mathbb{C}[x,y]$ (надо пров. (ii))

$\simeq A[[\hbar]]$ прим. 2 - упр. (mod ассоц.)

Пример 4: $U_\hbar(\mathfrak{g})=T(\mathfrak{g})[[\hbar]]/(x\otimes y-y\otimes x-\hbar[x,y],\ x,y\in\mathfrak{g})$

- форм. деформ. $S(\mathfrak{g})$ (ii $\Leftrightarrow$ PBW Thm)

3) Алг. наблюд: ассоц. алг. $A_\hbar/\mathbb{C}[[\hbar]]$ с 1 т.ч.

i) $A := A_\hbar/\hbar A_\hbar$ коммут.

ii) $\hbar$ не делит. 0

iii) $\hbar$-адич. топол. на $A_\hbar$ полна и отдел.

A - коммут. $\Rightarrow [a,b]\in\hbar A_\hbar\ \forall a,b\in A_\hbar \overset{[ii]}{\Rightarrow} \frac{1}{\hbar}[a,b]$ корр. опр $\rightsquigarrow$ ур-е Гейзенберга

$\dot F=\frac{1}{\hbar}[H,F]$.

$\pi: A_\hbar \xrightarrow{/\hbar} A$

Скобка на A: $\underline{a}, \underline{b} \in A \rightsquigarrow$ выберем $a \in \pi^{-1}(\underline{a})$, $b \in \pi^{-1}(\underline{b})$

Упр: • $\{\underline{a}, \underline{b}\} := \pi\left(\frac{1}{\hbar}[a, b]\right)$ не зав. от a, b.

• $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона

Ур-е Гейзенберга mod $\hbar \rightsquigarrow$ ур-е Гамильтона

Пробл. квантования: По $(A, \{\cdot, \cdot\})$ $\frac{\text{постр.}}{\text{классиф}}$ $A_\hbar$ т.ч. $\{\cdot, \cdot\}$ совп. с скобкой индуц. с $A_\hbar$

Полож. реш: $A = C^\infty(M)$, M – гладк. мн-е или $A = \mathbb{C}[X]$, X – гладк. афф. алг. мн-е

Концевич: классиф $*_\hbar$: $A \otimes A \longrightarrow A[[\hbar]]$

+ родств. результ. в негладком случае