~~Замечания к лекции 3~~?

~~Лекция 4. И такие наименования Джонса~~

Лекция: деформационное квантование

0) Классическая и квантовая механика

1) Пуассонова алгебра

2) Деформации алгебр

3) Квантование как деформация

~~[illegible]~~

	Классич. механика	Квант. механика
Алг. наблюдаемых	Пуассонова алгебра A над $\mathbb{R}$ (коммут. алгебра со скобкой Пуассона)	Пр-во ~~А~~ Самосопр. операторов $\hat{A}$ в гильбертовом пр-ве
Уравнение движения	$\dot{f} = \{H, f\}$, $f \in A$ ~~—~~ произв. набл., $H \in A$ - энергия — уравн. Гамильтона	$\dot{F} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, F]$, $\hat{H}$ - энергия, F - произв. наблюдаемая — уравнение Гейзенберга

~~Проблема~~ ~~Принцип~~ $\hbar$ - постоянная Планка - очень маленькая ~~ф~~ константа. Она очень маленькая для ~~h~~ обычных размеров с нас, но не маленькая для электронов. Поэтому мы можем считать, что ~~в~~ классическая (т.е. класс. механ. системы) механика получается из квантовой при $\hbar \to 0$. ~~Это~~ ~~Иными словами~~ Это назыв. принципом соответствия.

Проблема с этими двумя формализмами состоит в том, что они очень разные. Поэтому сложно не только проквантовать (= перейти к квантовой) классическую систему, но и перейти обратно ("взять квазиклассический предел"). Первое и должно быть сложно (квантовая механика сложнее классической), но второе нет. Поэтому хочется формализма

1

~~так~~ в котором: 1) легко брать квазиклассич. предел

2) Уравнение Гейзенберга имеет смысл

Деформационное квантование тоже формально осмысленно.

1) Мы объясним, что такое Пуассоновы алгебры и почему их правильно считать алгебрами наблюдаемых в класс. механике.

Мы начнем с потенциальных систем с потенциалом, который не зависит от времени. Ньютоновская механическая система в $\mathbb{R}^n$ выглядит как

$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$, где x-координата движущейся точки $x=(x_1, \dots, x_n)$, а $F=(F_1, \dots, F_n)$ вектор силы (в том числе ускорения). Потенциальная система — это специальный вектор F, а именно $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, где $V = V(x_1, \dots, x_n)$ потенциал. Т.е. наше уравнение принимает вид $\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$

А дальше мы применим стандартный трюк в ОДУ: понизим порядок, введя вспомогательные переменные $y_i := \dot{x}_i$. Уравнения перепишутся в виде

$$\dot{x}_i = y_i$$
$$\dot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Из курса физики мы знаем, что полезно рассматривать полную энергию $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + V(x_1, \dots, x_n)$. В терминах H имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$ — это и есть уравнения Гамильтона, но мы хотим их ещё переписать.

А именно, мы бы хотели понять поведение любой гладкой функции $f = f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$ на траектории $x(t)$, а не только координатных функций. Мы пишем $\dot{f} = \frac{d}{dt} f(x(t))$

Имеем $\dot{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\dot{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_i}$

Опр: Скобка Пуассона на $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ задается ф-лой:

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Получаем ур-е Гамильтона $\dot{f} = \{H, f\}$

Скобка, которую мы определили, обладает такими свойствами:

0) $\mathbb{R}$-билинейность
1) Кососимметричность: $\{f,g\}=-\{g,f\}$
2) Т-во Лейбница $\{f,g\cdot h\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$
3) Т-во Якоби

Операция с такими св-вами (к-ая имеет смысл над любым кольцом) называется скобкой Пуассона. Алгебра Пуассона — коммутативная, ассоциативная алгебра с 1, снабженная скобкой Пуассона

Пример: 1) $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ или $\mathbb{C}[x_1..x_n,y_1..y_n]$ со скобкой как выше

2) $\mathfrak{g}$-алг. Ли, $S(\mathfrak{g})$ — симметр. алг. Определим $\{x,y\}:=[x,y]$, а на $S(\mathfrak{g})$ распространим пользуясь правилом Лейбница

$1(\mathbb{C})$

2) Алгебра — это билинейное отображение $A\times A\to A$ на векторном пр-ве. Мы можем деформировать (“непрерывно менять”) это отображение. Например:

$A=\mathbb{C}^2$ с базисом $1,x$. Исходное умножение $\cdot$: $1\cdot1=1$, $1\cdot x=x\cdot1=x$, $x\cdot x=0$. В к-ве его деформации можем взять $*_\hbar$: $1*_\hbar1=1$, $1*_\hbar x=x*_\hbar1=x$, $x*_\hbar x=\hbar$. Здесь $\hbar$ — независимая переменная. (так что $*_\hbar|_{\hbar=0}=\cdot$)

~~Ещё~~ пример 2: $A=\mathbb{C}[x,y]$ с обычным умножением. Положим

$$f*_\hbar g:=m\Big(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\hbar/2)^i}{i!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial x}\Big)^i f\otimes g\Big)$$ ← сумма конечна для любых f,g.

Здесь $m:A\otimes A\to A$ обычное умножение.

Например: $f*_\hbar1=1*_\hbar f=m(f\otimes1)=f$.

$x*_\hbar x=x^2$, $y*_\hbar y=y^2$

$$x*_\hbar y=m\Big(x\otimes y+\frac{\hbar}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial x}\Big)x\otimes y\Big)=m\Big(x\otimes y+\frac{\hbar}{2}1\otimes1\Big)=xy+\hbar/2$$

$$y*_\hbar x=xy-\frac{\hbar}{2}$$

Отметим, что в наших примерах $*_\hbar$ зависит полиномиально от $\hbar$. Поэтому мы можем рассматривать $*_\hbar$ как отображение $A\otimes_{\mathbb{C}}A\longrightarrow A[\hbar]$. А далее можем продолжить по $\mathbb{C}[\hbar]$-линейности до $A[\hbar]\otimes_{\mathbb{C}[\hbar]}A[\hbar]\to A[\hbar]$. Т.е. $A[\hbar]$ становится алгеброй над $\mathbb{C}[\hbar]$ с умножением $*_\hbar$

Естественно, что при деформации мы бы хотели сохранить некоторые св-ва. Таким, например, является ассоциативность. В первом примере она очевидна, а во втором становится нетривиальной задачей. А вот о сохранении коммутативности мы не просили.

Нам нужно будет модифицировать понятие деформации в двух направлениях. Во-первых, мы будем рассматривать случай, когда $f \ast_\hbar g$ является степенным рядом, а не полиномом от $\hbar$. Мы уже видели нечто подобное в примере 2: $\ast_\hbar$ – это ряд, но $f \ast_\hbar g$ имеет только конечное число членов. Но мы будем получать новую структуру алгебры на $A[[\hbar]]$.

если f или g являются многочленом не полином от C^∞-функц. будем получ. беск. ряд

Во-вторых, мы до сих пор рассматривали случай, когда A фиксировали как пр-во, а менялась только структура алгебры. Это очень ограничительно, а во многих случаях деформированная алгебра все ещё изоморфна $A[\hbar]$ (или $A[[\hbar]]$) как модуль над $\mathbb{C}[\hbar]$ (или $\mathbb{C}[[\hbar]]$), но естественного отождествления нет. Вот обобщённое определение "формальной однопараметрической деформации": алгебра $A_\hbar$ над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ т.ч.:

1) $A_\hbar / \hbar A_\hbar = A$ – равенство алгебр
2) $\hbar$ не делитель нуля в $A_\hbar$
3) Топология с системой окрестностей 0: $\hbar^k A_\hbar$ отделима и полна.

Пример: 3) Алгебра Вейля: симплект. пр-ва: V с $\omega \in \Lambda^2 V^*$ невыр. ф-ма

$$W_\hbar(V) := T(V)[[\hbar]] / (u \otimes v - v \otimes u - \hbar\omega(u,v),\ u,v \in V)$$

Можно сделать и полиномиальный аналог. Для $V = \mathrm{Span}(x,y)$ с $\omega = dx \wedge dy$ мы получаем в точности алгебру из примера 2 выше.

4) $U_\hbar(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})[[\hbar]] / (x \otimes y - y \otimes x - \hbar[x,y],\ x,y \in \mathfrak{g})$

Утверждение о том, что $\hbar$ не делитель 0 экв. теореме PBW.

У этих алгебр есть и полином. версии (над $\mathbb{C}[\hbar]$). Если в примере 4 специализоваться по $\hbar = 1$, то получим обычную алгебру $U(\mathfrak{g})$

3) Квантование как деформация. Мы полагаем, что алгебра наблюдаемых — это ассоц. алгебра $A_\hbar$ с единицей над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, удовл. след. условиям:

1) $A := A_\hbar / \hbar A_\hbar$ — коммут. алгебра

2) $\hbar$ не делитель нуля

3) $\hbar$-адич. топология на $A_\hbar$ полна и отделима.

Отметим, что такое определение оправдывается малостью $\hbar$. В силу коммутативности A, мы видим, что $[a,b] := ab - ba \in \hbar A_\hbar$ $\forall a, b \in A_\hbar$. Благодаря 2) элемент $\frac{1}{\hbar}[a,b]$ определен. Поэтому "уравнение Гейзенберга" $\dot{f} = \frac{1}{\hbar}[H,f]$ имеет смысл, в том смысле, что правая часть определена. Пусть $\pi : A_\hbar \to A$ — проекция

Кроме того, на A имеется естественная скобка Пуассона. Именно, возьмем эл-ты $a_0, b_0 \in A$ ~~[illegible]~~ и выберем эл-ты $a \in \pi^{-1}(a_0)$, $b \in \pi^{-1}(b_0)$. Можно показать (проверьте), что:

1) элемент $\{a_0, b_0\} = \pi\left(\frac{1}{\hbar}[a,b]\right)$ корректно определен (не зависит от выбора a, b)

2) $\{\cdot,\cdot\}$ скобка Пуассона

Т.е. беря уравнение Гейзенберга mod $\hbar$ получаем уравн. Гамильтона.

Упр. Мы привели об. примеры деформаций

Проблема квантования ставится так: по пуассоновой алгебре A построить её формальную деформацию (часто в виде $(A[[\hbar]], *_\hbar)$), так чтобы исходная скобка на A совпадала со скобкой, приходящей с $A_\hbar$.

Упр. $U_\hbar(\mathfrak{g})$ — квантование $S(\mathfrak{g})$

Для алгебр функций на C^∞/гладких аффинных алгебраических пуассоновых многообразий эта задача была решена Концевичем.