Дискретное преобразование Фурье — 2

Устинов А. В.

Пусть $n \geq 2$ и функция $f(x)$ задана в целых точках $x = 0, 1, \ldots, n-1$. Преобразованием Фурье называется отображение $\mathcal{F}$, которое вектору $f = (f(0), \ldots, f(n-1))$ ставит набор коэффициентов Фурье $C = (C(0), \ldots, C(n-1))$. При этом функция представима рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k) e^{2\pi i \frac{kx}{n}},$$

а числа $C(k)$ определены рвенствами

$$C(k) = \frac{1}{n} \sum_{y=0}^{n-1} f(y) e^{-2\pi i \frac{ky}{n}} \qquad (0 \leq k < n).$$

1. Что такое квадрат дискретного преобразования Фурье $\mathcal{F}^2$?

2. Что делает дискретное преобразование Фурье с произведениями двух функций? Другими словами, если $f = f_1 f_2$, то как вектор $C = \mathcal{F}(f)$ выражается через $C_1 = \mathcal{F}(f_1)$ и $C_2 = \mathcal{F}(f_2)$?

3. Разложите в конечный ряд Фурье функцию $f(x) = x$.

Геометрическая интерпретация дискретного преобразования Фурье (продолжение)

4. Найдите наименьшее $\varepsilon > 0$ такое, для которого можно найти правильный треугольник с вершинами в замыкании ε-окрестностей точек
а) $(0,0)$, $(7,4)$, $(0,8)$; б) $(0,0)$, $(15,4)$, $(4,15)$.

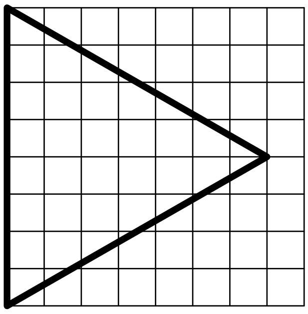
5*. **Оптимальные правильные треугольники на решетке.** Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Среди всех правильных треугольников с вершинами в ε-окрестностях различных целых точек можно выбрать треугольник наименьшего размера. Будем называть такие треугольники оптимальными. Докажите, что все оптимальные треугольники распадаются на две серии. Первая серия (с точностью до параллельного переноса, поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий относительно горизонтальных и вертикальных прямых) состоит из треугольников с вершинами вблизи точек $(0,0)$, (x_n, y_n), $(0, 2y_n)$, где

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\} = \{(2,1), (7,4), (26,15), (97,56), \ldots\}$$

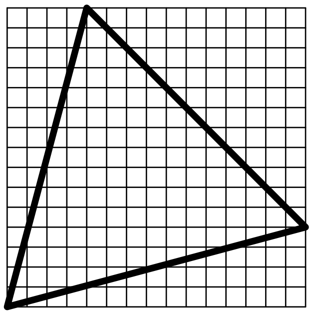
— решения уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$. Вторая серия (с точностью до тех же движений) — треугольники с вершинами вблизи точек $(0,0)$, (u_n, v_n), (v_n, u_n), где

$$\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots\} = \{(1,0), (4,1), (15,4), (56,15), \ldots\}$$

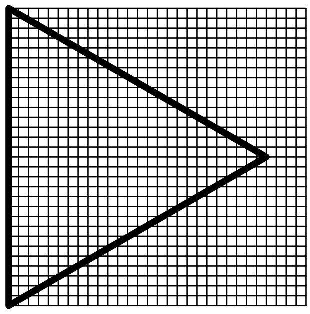
— решения уравнения $u^2 - 4uv + v^2 = 1$, причем $u_n = y_n$, $v_n = y_{n-1}$.



$x_2 = 7$, $y_2 = 4$.



$u_3 = 15$, $v_3 = 4$.



$x_3 = 26$, $y_3 = 15$.

6. Пусть ε_k — расстояние от вершин k-го оптимального треугольника до узлов целочисленной решетки. Найдите ε_k.