Решётки и коды — лекция 1
В.А. Клепцын

Определение 1. *Решёткой* в $\mathbb{R}^n$ — множество Λ вида

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid \forall j \quad k_j \in \mathbb{Z}\} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}},$$

где $(v_1, \dots, v_n)$ — (некоторый) базис $\mathbb{R}^n$. Набор $(v_1, \dots, v_n)$ при этом называется *базисом* решётки Λ.

Это определение можно (для тех, кто знает все употребляемые ниже термины) переформулировать:

Определение 2. *Решётка* в $\mathbb{R}^n$ — дискретная (т. е., состоящая из изолированных точек) подгруппа $\Lambda < \mathbb{R}^n$, фактор по которой $\mathbb{R}^n/\Lambda$ имеет конечный объём[1].

Задача 1. Проверьте, что если к стандартной кубической решётке $\mathbb{Z}^3$ добавить центры всех граней соответствующих единичных кубов, то получится решётка.

Задача 2. Проверьте, что если к стандартной кубической решётке $\mathbb{Z}^n$ добавить центры всех соответствующих единичных кубов, то получится решётка.

Определение 3. Определённая в задаче 1 трёхмерная решётка называется *гранецентрической*, или ***cfc***; определённая в задаче 2 для $n = 3$ — называется ***bcc***.

Определение 4. *Фундаментальный параллелепипед* решётки

$$\Lambda = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid \forall j \quad k_j \in \mathbb{Z}\}$$

это множество $\Pi_\Lambda = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid \forall j \quad k_j \in \mathbb{Z}\}$. (Стоит отметить, что таких параллелепипедов много — поскольку одну и ту же решётку можно задавать разными базисами.) Его объём $\mathrm{vol}(\Lambda)$ называется *кообъёмом* решётки Λ:

$$\mathrm{covol}(\Lambda) = \mathrm{vol}(\Pi_\Lambda).$$

Задача 3. Докажите, что предыдущее определение корректно, то есть что результат не зависит от выбора базиса решётки Λ.

[1] Вместо этого можно было бы попросить, чтобы фактор был компактен; но определение с объёмом работает для любых групп, а в случае нетривиальных групп (к примеру, $PSL(2, \mathbb{R})$) те решётки, фактор по которым компактен, принято выделять в отдельных класс «более хороших» — *кокомпактных* — решёток.

Для знакомых с понятием индекса подгруппы:

Задача 4. Если $\Lambda_1 < \Lambda_2$, то $\frac{\mathrm{covol}(\Lambda_1)}{\mathrm{covol}(\Lambda_2)} = [\Lambda_2 : \Lambda_1]$.

Задача 5. Плотность упаковки непересекающихся шаров, центры которых находятся в вершинах решётки Λ, равна

$$\rho = \frac{w_n\, l(\Lambda)^n}{2^n \cdot \mathrm{covol}(\Lambda)},$$

где w_n — объём единичного шара в n-мерном пространстве, а через

$$l(\Lambda) := \min_{v \in \Lambda \setminus \{0\}} l(v)$$

обозначена длина кратчайшего ненулевого вектора решётки.

Определение 5. *Контактным числом* решётки Λ называется число векторов наименьшей положительной длины.

Задача 6. Если в вершинах решётки Λ размещены шары радиуса $l(\Lambda)/2$, то контактное число — число шаров, касающихся любого из них.

Мы будем работать с решётками в пространстве $\mathbb{R}^n$, снабжённом скалярным произведением. В частности, нас будет интересовать геометрия пространства (расстояния, углы, и т. д.), но мы не будем считать выделенным какой-либо отдельный ортонормальный базис: совмещаемые изометрией решётки мы будем считать неразличимыми.

Определение 6. Треугольная решётка на плоскости называется *решёткой типа A_2.*

Определение 7. Решётка типа A_n — решётка в n-мерном подпространстве $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$V = \{x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\},$$

получаемая как $A_n := V \cap \mathbb{Z}^{n+1}$.

Задача 7. Проверьте, что предыдущие два определения согласованы.

Определение 8. Решётка типа D_n — решётка в $\mathbb{R}^n$, задаваемая как

$$\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid k_1 + \cdots + k_n \equiv 0 \mod 2\}.$$

Задача 8. Докажите, что решётка, получающаяся при стандартной упаковке апельсинов, совпадает (с точностью до поворота и гомотетии) с решётками D_3, ***cfc***, A_3, а также с решёткой, в которой слои уложенных квадратно-гнездовым способом апельсинов кладутся друг на друга со сдвигом на полклетки и с минимальным сдвигом по высоте.

Задача 9. Найдите контактное число решётки из определения 8, контактное число решётки ***bcc***.

Задача 10. Найти контактное число решётки из определения 2 для $n = 4$ (эта решётка называется *шахматной*).

Определение 9. Обозначим через Γ_n подмножество $\mathbb{R}^n$, заданное как

$$\Gamma_n = D_n \bigcup \left(D_n + (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \right).$$

Задача 11. Γ_n — решётка тогда и только тогда, когда n — чётно.

Задача 12. Найдите кообъёмы всех упоминавшихся выше решёток.

Определение 10. Решётка $\Lambda < \mathbb{R}^n$ называется *целой*, если

$$\forall u, v \in \Lambda \quad \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Она называется *чётной*, если

$$\forall u \in \Lambda \quad \langle u, u \rangle \in 2\mathbb{Z}.$$

Наконец, решётка называется *унимодулярной*, если её кообъём равен 1.

Задача 13. Чётная решётка — целая.

Задача 14. Γ_n — целая тогда и только тогда, когда n делится на 4.

Задача 15. Γ_n — чётная тогда и только тогда, когда n делится на 8.

Определение 11. *Двойственной* решёткой Λ' к решётке Λ называется решётка, определённая как

$$\Lambda' = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in \Lambda \quad \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Если решётка совпадает со своей двойственной, то она называется *самодвойственной*.

Задача 16. Проверьте, что Λ' — действительно решётка. Чему равен её кообъём?

Задача 17. Решётка Λ целая тогда и только тогда, когда $\Lambda < \Lambda'$.

Задача 18. Решётка Λ самодвойственная тогда и только тогда, когда она целая и унимодулярная.

Задача 19. Как устроена двойственная решётка к D_n?