

Склейка Виро — предварительная версия

В.Клепцын

31 августа 2006 г.

Аннотация

Этот текст посвящён склейке Виро, процедуре, тесно связанной с тропической геометрией.

Написанный в достаточно вольном стиле, он является слегка дополненной записью обсуждения, произошедшего на ЛШСМ-2006 по мотивам курса М. Э. Казаряна. Конечно, получившийся текст не претендует на вычитанность и идеальную стилистику научной статьи — это всего лишь минимально обработанный рассказ “от первого лица”.

В связи с этим он несёт больший, чем обычно, отпечаток личности автора; кроме того, увы, некоторые исторические отступления сделаны “по памяти”, не проверяя их по первоисточникам — тем самым, возможно, что-то из написанного не совсем точно соответствует действительности. Я буду благодарен читателям за указания на любые ошибки или неточности.

Введение: 16-я проблема Гильберта

Шестнадцатая проблема Гильберта, одна из 23-х, поставленных Давидом Гильбертом в его знаменитом докладе 1900 года, состоит из двух довольно похожих по формулировке частей, алгебраической и дифференциальной. Алгебраическая часть состоит в том, чтобы описать расположение овалов (компонент связности) множества нулей многочлена $P(x, y)$ степени n на вещественной плоскости, в предположении, что этих овалов максимально возможное количество (а именно, как посчитал А. Харнак, $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$). Кроме того, Гильберт задавал похожий вопрос про вещественные алгебраические поверхности в трёхмерном пространстве. Дифференциальная часть состоит в том, чтобы оценить сверху количество предельных циклов (замкнутых траекторий, рядом с которыми

нет других замкнутых траекторий) полиномиального дифференциального уравнения степени n на плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

и понять, как эти предельные циклы могут быть расположены. Несмотря на схожесть формулировок, текущие состояния у этих задач весьма сильно различаются — дифференциальная часть оказалась намного сложнее алгебраической!

В алгебраической части ответ для $n = 2$ тривиален, для $n = 3$ он получается не очень сложным рассуждением, для $n = 4$, в общем-то, тоже, если поверить в оценку Харнака — впрочем, это хорошее упражнение: понять, почему один из четырёх овалов для степени 4 не может находиться внутри другого, ну и $n = 5$ тоже в принципе можно одолеть (на самом деле, для этих степеней можно и вообще все возможные расположения перечислить, хотя это и потребует определённых усилий). А вот с $n = 6$ уже начинается серьёзная работа, и Гильберт этой проблемой занимался. Собственно, в тексте своего доклада, вводя эту проблему, Гильберт утверждал [7], что (как следует из довольно сложных его рассуждений) при $n = 6$ возможны лишь два варианта расположения одиннадцати (максимальное число) овалов на проективной плоскости: один овал, внутри него ещё один, и снаружи ещё девять, или же один, внутри него девять, а снаружи ещё один.

Как обнаружил Д. А. Гудков около 1970 года, на самом деле Гильберт здесь ошибался — есть ещё расположение “пять овалов внутри, пять снаружи”, пример которого он и предъявил вместе с доказательством, что ничего больше уж точно не бывает (завершив тем самым исследование случая $n = 6$).

Дальше эта теория развивалась: В. И. Арнольд, читая работу Гудкова, предположил, что “разрешённые” варианты $1 - 9$, $5 - 5$, $9 - 1$ идут через четыре неспроста. Арнольд высказал некоторую гипотезу о сравнимости некоторой эйлеровой характеристики по модулю 8 с некоторой другой величиной и доказал эту гипотезу в ослабленной версии сравнения по модулю 4, а затем В. А. Рохлину удалось доказать её полностью, получив сравнение по модулю 8.

До этой эпопеи наука тоже не стояла на месте: И. Г. Петровский и О. А. Олейник в 30-50-е годы получили оценки на числа Бетти (некоторые важные топологические инварианты, например, b_0 это число компонент связности, а b_1 это число различных “независимых” способов нарисовать нестягиваемую петлю), стоит упомянуть также подключившихся к этой деятельности позднее Дж. Милнора и Р. Тома...

Ну а после того, как произошёл вышеупомянутый прорыв 1970-х, подключились О. Я. Виро (сделавший случай $n = 7$, в частности, с помощью той техники, которой и посвящён этот текст), В. М. Харламов, упомянутый выше В. А. Рохлин, А. Г. Хованский, . . . — вещественная алгебраическая топология начала брать разгон, оказавшись связанной с уймой других областей науки (чего стоит одна квантовая теория поля!). Я не буду останавливаться здесь на этом более подробно, отослав читателей к страницам 39–45 интересного текста В. И. Арнольда [4].

История дифференциальной части оказалась ещё более драматической. Вообще, кажется, Гильберт, формулируя эту проблему, не представлял себе всей её сложности — у него была скорее алгебраическая, чем дифференциальная, интуиция. А именно, Гильберт наметил при формулировке путь атаки на этот вопрос, который сейчас бы назвали применением теории бифуркаций: “который, как мне кажется, должен быть решён с помощью упомянутого метода непрерывного изменения коэффициентов” [7]. Дифференциальную часть 16-й проблемы действительно сейчас атакуют именно с этого направления — но формулировка Гильберта звучит так, как если бы этого метода уже хватало для решения проблемы, когда на самом деле это только первый шаг в направлении решения.

Когда Анри Пуанкаре (с которого исследование полиномиальных векторных полей началось) узнал о том, как сформулирована дифференциальная часть, его реакция была примерно такой же: он-то, в отличие от Гильберта, дифференциальные уравнения (и все возникающие там трудности) себе представлял очень хорошо, будучи создателем их качественной теории! Дело в том, что даже индивидуальная теорема конечности (то, что у полиномиального векторного поля на плоскости не может быть бесконечного числа предельных циклов) в отличие от алгебраического случая уже абсолютно неочевидна!

Дальше я изложу только основные намётки этой истории, не останавливаясь на том, что в это время происходило с общей качественной теорией динамических систем (подкова Смейла, диффеоморфизмы Аносова, гиперболическая и частично-гиперболическая теории, явление Ньюхауса, аттракторы, меры Синая-Рюэлля-Боуэна, бильярды, тут одного перечисления на десяток строк), и не углубляясь в детали.

Итак, сначала всё шло более-менее оптимистично. Сначала в 1923 году А. Дюлак опубликовал свой мемуар о предельных циклах [6], в котором он доказывал индивидуальную теорему конечности для полиномиальных векторных полей. Затем где-то в 50-е годы Петровский и Е. М. Ландис опубликовали стратегию, позволяющую оценивать число предельных циклов для любого n , которая должна была давать полино-

миальную (полиномом степени 3) по n оценку, в частности, при $n = 2$ (первый нетривиальный случай — при $n = 1$ предельных циклов быть не может) получалась оценка числом 3 (во что долгое время верили специалисты). Казалось, что всё уже сделано.

Увы, в 63-м году Ю. С. Ильяшенко и С. П. Новиков обнаружили серьёзный пробел в предложенной стратегии.

Насколько я помню, Юлий Сергеевич в тот момент был студентом, а И. Г. Петровский ректором МГУ. После того, как была найдена эта ошибка, Иван Георгиевич не только не обиделся на студента, нашедшего в одной из любимых его работ ошибку, но и начал с ним работать. В итоге научными руководителями Юлия Сергеевича стали Е. М. Ландис и В. И. Арнольд — создалась поразительная по своей мощи группа из двух математиков “старшего” поколения, И. Г. Петровского и Е. М. Ландиса, и четырёх “младшего”: В. И. Арнольда, Ю. С. Ильяшенко, С. П. Новикова? и А. Г. Хованского.

Вообще, Иван Георгиевич Петровский был величайшим ректором МГУ и редчайшим человеком; на его могиле вполне могла бы быть надпись “здесь покоится человек, сделавший десять тысяч добрых дел”, и она бы соответствовала действительности. Чего стоит одна его невообразимая по сегодняшним временам доступность (правда, посетитель должен был быть готов формулировать своё дело быстро и чётко). Но об этом лучше читать отдельно...

Некоторое время Петровский, Ландис и созданная группа (помимо других исследований) пыталась закрыть этот пробел, но увы, “дыра” залапываться отказалась. Более того, в 1979-80-м Ши Сонглин, Чен и Ванг построили пример квадратичного векторного поля с четырьмя предельными циклами. Это означало, что не только непонятно, как доказывать один из переходов в стратегии Петровского-Ландиса, но и что это место в принципе пройти нельзя — иначе получался бы неверный ответ! До окончательного разрушения казавшегося таким стройным здания оставалось совсем чуть-чуть: в 1981 году Ильяшенко (кажется, после письма Р. Муссю) обнаруживает дыру в рассуждениях Дюлака.

Обнаруженную дыру тоже пытаются залатать, но успех приходит далеко не сразу. В итоге в 91-92 годах (через 10 лет, и всего 15 лет назад!) этот пробел закрывают (двумя разными способами) Ильяшенко и Экаль — но для строгого изложения их рассуждений каждому из них приходится написать по книге!

В 1984 году получается ещё одно продвижение: Варченко и Хованский доказывают, что для малых возмущений гамильтоновых векторных полей степени n число получаемых предельных циклов ограничено сверху

(“инфинитезимальная проблема Гильберта”). Увы, их оценка получается неконструктивной: это чистая теорема существования. Несколько последних работ А. Глуцюка и Ильяшенко посвящены нахождению явных оценок при дополнительных предположениях на многочлен (которые получаются башнями из четырёх экспонент — но всё лучше, чем ничего).

Я не упомянул здесь ещё многих и многих, принимавших участие в этой деятельности — Муссю, Руссари, Яковенко, Панова, Линса, Пью, и других — опять же, полное перечисление само по себе займёт несколько строк. Я почти не коснулся разных “ограниченных вариантов” 16-й проблемы (когда рассматриваются поля только какого-нибудь специального вида). У меня здесь просто не хватит на это места. Лучше посмотрите замечательный, очень понятно написанный обзор Ильяшенко [5]¹! А я подытожу вышесказанное, сказав, что в общей постановке на текущий момент мы не умеем даже доказывать, что число возможных циклов у квадратичных векторных полей ограничено сверху!

Ну вот, собственно, и вся вводная часть. Давайте посмотрим теперь на саму конструкцию, которой посвящён этот текст.

Описание процедуры

Пусть $P_1(x, y), P_2(x, y)$ два полинома на комплексной плоскости, равные соответственно

$$P_1(x, y) = \sum_{j,k} a_{j,k} x^j y^k, \quad P_2(x, y) = \sum_{j,k} b_{j,k} x^j y^k,$$

и их нулевые линии уровня неособые. Это, в частности, означает, что у полиномов с близкими коэффициентами нулевые линии уровня тоже близкие. Наша задача (имеющая прямое отношение к построениям примеров для 16-й проблемы Гильберта) такова. *Требуется построить полином той же степени, что и эти, у которого нулевая линия уровня похожа на одних участках на нулевую линию уровня P_1 , а на других на нулевую линию уровня P_2 .* В частности, тогда у построенного многочлена число компонент связности (“овалов”) этой нулевой линии уровня будет по меньшей мере суммой таковых для P_1 и P_2 . Поскольку их число для данной степени ограничено, ясно, что чтобы такое построение оказалось возможным, нам потребуется наложить какие-то предположения на P_1 и P_2 .

¹Этот текст можно прочесть по-русски в выпуске семинара “Глобус”, в котором, собственно, есть ещё много чего интересного, а по-английски его можно скачать с сайта AMS, со страницы <http://www.ams.org/journals/bull/2002-39-03/home.html>

Рассмотрим многоугольники Ньютона наших многочленов:

$$F_1 = \text{conv}\{(j, k) \mid a_{j,k} \neq 0\}, \quad F_2 = \text{conv}\{(j, k) \mid b_{j,k} \neq 0\};$$

здесь conv обозначает выпуклую оболочку множества.

Предположение, которое мы на наложим на полиномы, будет таким: *допустим, что многоугольники Ньютона F_1 и F_2 не пересекаются.*

Тогда найдётся функция $\varphi(j, k)$ со следующими свойствами:

- функция φ нестрога выпукла вниз на всей плоскости (j, k) ;
- функция φ в ограничении на каждый из многоугольников F_1, F_2 линейна:

$$\varphi(j, k) = l_1(j, k) = \alpha_1 j + \beta_1 k + \gamma_1 \quad \forall (j, k) \in F_1,$$

$$\varphi(j, k) = l_2(j, k) = \alpha_2 j + \beta_2 k + \gamma_2 \quad \forall (j, k) \in F_2;$$

- на каждом из многоугольников “чужая” линейная функция строго меньше φ :

$$\forall (j, k) \in F_2 \quad \varphi(j, k) = l_2(j, k) > l_1(j, k),$$

$$\forall (j, k) \in F_1 \quad \varphi(j, k) = l_1(j, k) > l_2(j, k),$$

или, иначе говоря, прямая, заданная уравнением $l_1(j, k) = l_2(j, k)$, проходит строго между F_1 и F_2 (не задевая ни за один из них).

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить многочлен $Q_\varepsilon(x, y)$ следующим образом:

$$Q_\varepsilon(x, y) = \sum_{j,k} (a_{j,k} + b_{j,k}) \cdot \varepsilon^{\varphi(j,k)} x^j y^k.$$

Оказывается, что при одних заменах координат нулевая линия уровня этого многочлена становится похожей (тем больше, чем ближе ε к 0) на таковую у многочлена P_1 , а при других на таковую у P_2 . А именно: пусть $\tilde{x} = \varepsilon_1^\alpha x, \tilde{y} = \varepsilon_1^\beta y$. Тогда

$$\tilde{x}^j \tilde{y}^k = \varepsilon^{\alpha_1 j + \beta_1 k} x^j y^k = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma_1}} \cdot \varepsilon^{l_1(j,k)} x^j y^k,$$

поэтому в новых координатах получаем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}) &= Q_\varepsilon(x, y) = \sum_{j,k} (a_{j,k} + b_{j,k}) \cdot \varepsilon^{\varphi(j,k)} x^j y^k = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{\gamma_1}} \sum_{j,k} \varepsilon^{\varphi(j,k) - l_1(j,k)} (a_{j,k} + b_{j,k}) \tilde{x}^j \tilde{y}^k \end{aligned}$$

Соответственно, домножив на ε^{γ_1} (что не меняет нулевой линии уровня), получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\gamma_1} \tilde{Q}_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{(j,k) \in F_1} \varepsilon^{\varphi(j,k) - l_1(j,k)} a_{j,k} \tilde{x}^j \tilde{y}^k + \\ &+ \sum_{(j,k) \in F_2} \varepsilon^{\varphi(j,k) - l_1(j,k)} b_{j,k} \tilde{x}^j \tilde{y}^k = \\ &= P_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sum_{(j,k) \in F_2} \varepsilon^{\varphi(j,k) - l_1(j,k)} b_{j,k} \tilde{x}^j \tilde{y}^k.\end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что на F_1 — многоугольнике Ньютона многочлена P_1 — функция φ совпадает с l_1 .)

Тем самым, после такой замены переменной и домножения на ε^{γ_1} , многочлен Q_ε становится многочленом P_1 , к которому добавлены слагаемые от многочлена P_2 , домноженные на положительные (! — так функцию φ выбирали) степени ε . Значит, при $\varepsilon \rightarrow 0$ нулевая линия уровня \tilde{Q}_ε (то есть нулевая линия Q_ε) стремится к нулевой линии уровня P_1 .

Осталось заметить, что многочлены P_1 и P_2 в этой конструкции совершенно равноправны: если сделать замену $\tilde{x} = \varepsilon^{\alpha_2} x$, $\tilde{y} = \varepsilon^{\beta_2} y$, то нулевая линия уровня Q_ε после такой замены при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет стремиться к нулевой линии уровня P_2 .

Вот мы и достигли нашей цели: взяв ε достаточно малым, получаем многочлен Q_ε , у которого нулевая линия уровня после одной замены становится похожа на линию уровня P_1 , а после другой на линию уровня P_2 — и, в каком-то смысле, в этих двух “похожестях” (по большей части) играют разные участки линии уровня Q_ε .

Пример применения

Пусть

$$P_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad P_2(x, y) = x^3(x^2 + y^2 - 4x + 3).$$

То есть хотим построить кривую 5 степени с двумя овалами, но чтобы у двух исходных окружностей многоугольника Ньютона не пересекались, одну из них мы домножаем на x^3 (сдвигая тем самым многоугольник на 3 по оси j). Это, конечно, жутко неэкономно (уже у кривой степени 4 может быть целых 4 овала — достаточно взять лежащую в первом

квадранте окружность и подставить в её уравнение вместо каждой переменной её квадрат) — но мы экспериментируем. Вот их многоугольники Ньютона:

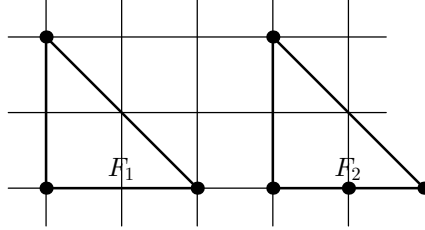


Рис. 1: Многоугольники Ньютона

Взяв функцию

$$\varphi(j, k) = \begin{cases} 0, & \text{если } j + k < 2.5, \\ j + k - 2.5, & \text{если } j + k \geq 2.5, \end{cases}$$

получаем

$$Q_\varepsilon(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) + 3\varepsilon^{0.5}x^3 - 4\varepsilon^{1.5}x^4 + \varepsilon^{2.5}x^5 + \varepsilon^{2.5}x^3y^2.$$

Кусок, соответствующий P_1 , здесь виден явно (для наглядности мы взяли $l_1 \equiv 0$), ну а с другой стороны, после замены $\tilde{x} = \varepsilon x, \tilde{y} = \varepsilon y$ (оба показателя у ε оказались равны 1, потому что $l_2(j, k) = 1 \cdot j + 1 \cdot k - 2.5$), получаем

$$Q_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^{2.5}} \{ (\varepsilon^{0.5}\tilde{x}^2 + \varepsilon^{0.5}\tilde{y}^2 - \varepsilon^{2.5}) + (3\tilde{x}^3 - 4\tilde{x}^4 + \tilde{x}^5 + \tilde{x}^3\tilde{y}^2) \}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части многочлен от \tilde{x}, \tilde{y} стремится к $P_2(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Обобщения и применения

Как уже было сказано выше, в данном конкретном случае использование получилось весьма неэкономным. Одна из причин этого — то, что описанный выше метод на самом деле является только упрощённой версией. Дело в том, что можно чуть-чуть сэкономить: если многоугольники Ньютона исходных многочленов имеют общую сторону (но не имеют общих внутренних точек), то нужно только попросить, чтобы соответствующие точкам на этой стороне коэффициенты у P_1 и P_2 совпадали — после чего в Q_ε на соответствующем месте ставить их без удвоения (потому что

на самом деле правильная формула это не $a_{j,k} + b_{j,k}$, а “тот из коэффициентов, который не равен нулю”). Кроме того, вовсе не обязательно “склеивать” именно два многочлена — их может быть несколько, нужно только найти выпуклую функцию, линейную на многоугольнике Ньютона каждого из них, с несовпадающими линейными ограничениями на разных многоугольниках.

Дальше я бегло произнесу несколько (вероятно, малоудобоваримых) фраз — поскольку нельзя объять необъятное...

Итак: во-первых, техника Виро и в этом упрощённом виде хороша. Даже с ограничением на непересечение многоугольников она позволила Р. М. Фёдорову [3] оценить снизу число разных фазовых портретов (с точностью до “гнезд предельных циклов”, неважно, что это такое²) у полиномиального векторного поля степени n . Оценка оказалась имеющей вид 2^{cn^2} , причём (из совершенно других соображений) сверху есть такая же оценка, только константа другая: 2^{Cn^2} . И это очень легко объяснить: “максимально дозволенный” треугольник Ньютона для многочлена степени $2n$ можно разрезать на 4 треугольника со стороной n . Возьмём 4 любых портрета у векторного поля степени n , домножим один из них на x^n , другой на y^n , в третьем сделаем замену $(1/x, 1/y)$ и умножим его на $(xy)^n$. Получим 4 полиномиальных векторных поля с непересекающимися многоугольниками Ньютона, и применим к ним склейку Виро. Найдём поле степени $2n$, ведущее себя в разных участках как 4 разных поля степени n . Тем самым (если аккуратно отследить, чтобы эти 4 кусочка не смешивались), число разных портретов полей степени $2n$ отличается от числа портретов полей степени n по меньшей мере возведением в четвёртую степень. А это и даёт 2^{cn^2} : при удвоении аргумента результат возводится в 4-ю степень. Это, конечно, только грубые намётки работы [3]...

Во-вторых, можно пойти обратным путём, что сделали И. В. Итенберг

² Дело в том, что если бы удалось оценить число различных фазовых портретов у полиномиальных векторных полей степени n на плоскости, то это автоматически означало бы ограничение на число предельных циклов у таковых портретов: ведь если у двух портретов разное число предельных циклов, то сами портреты тем более различаются. Значит, до того момента, как будет решена дифференциальная часть 16-й проблемы Гильберта, к этой задаче буквально подступиться нельзя. Но: на самом деле, много различных предельных циклов лежать как попало не могут. Если циклов очень много, они располагаются “гнездами”: цикл, внутри него ещё один, внутри этого следующий, и так далее — а между циклами в одном гнезде ничего “интересного” нет. И то, что никто не умеет оценивать — это сколько может быть циклов в гнезде. Так вот, Фёдоров смотрит на фазовый портрет “по модулю” гнезд, а именно, отмечая, где есть гнезда, но не различая портреты, если число циклов в соответствующих гнездах у них отличается.

и Виро в работе [1]: клеить дуги, полученные от сумм трёх мономов. А именно, можно взять сумму

$$Q_\varepsilon(x, y) = \sum_{j+k \leq n} c_{j,k} \cdot \varepsilon^{\varphi(j,k)} x^j y^k,$$

где коэффициенты $c_{j,k}$ равны либо нулю, либо плюс, либо минус единице, а у выпуклой функции φ множества линейности это треугольники с целочисленными вершинами в тех точках, где $c_{j,k} \neq 0$, причём внутри или на границе других таких точек нет. Тогда для малых $\varepsilon > 0$ линия уровня $Q_\varepsilon = 0$ будет моделироваться следующей схемой. В целочисленных точках с $c_{j,k} \neq 0$ треугольника $(0, 0) - (0, n) - (n, 0)$ на плоскости нужно расставить знаки “+” или “-” в зависимости от $c_{j,k}$, после чего в каждом треугольнике линейности φ , где не все три знака в вершинах совпадают, провести среднюю линию, отсекающую “одиночный” знак. Дальше достроить плюсы и минусы, отразив относительно оси Oj с умножением на $(-1)^k$ и относительно оси Ok с умножением на $(-1)^j$ (это соответствует переходу к отрицательным x или y : ведь $(-x)^j = (-1)^j x^j$), и повторить ту же процедуру и там тоже. Так вот, получившаяся схема и будет (по крайней мере с топологической точки зрения) описывать нулевую линию уровня у Q_ε . Более того, на самом деле если рассматривать уравнение $Q_\varepsilon = 0$ не на обычной, а на проективной плоскости, то схема остаётся точной, только нужно склеить “с переворотом” противоположные стороны получившегося (повёрнутого на 45°) квадрата.

Думаю, тут проще всего посмотреть на рисунки 1 и 7 работы [1], её можно скачать с сайта самого Виро: <http://www.math.uu.se/~oleg/iten-vi.ps>, но для простоты чтения я воспроизведу тут два простейших примера.

Возьмём наиболее простую функцию φ , и расставим знаки, например, так:

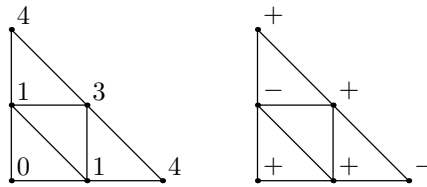


Рис. 2: Функция φ и исходная расстановка знаков

Этому соответствует многочлен

$$Q_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^4 x^2 + \varepsilon^3 xy - \varepsilon^4 y^2 - \varepsilon x + \varepsilon y + 1.$$

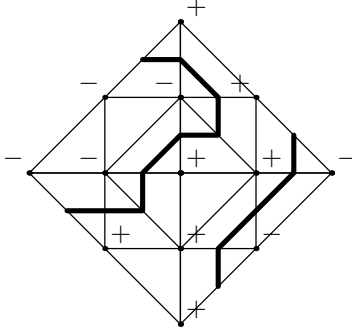


Рис. 3: Patchworking: гипербола

Вот получающаяся схема:

С некоторым напряжением тут можно узнать гиперболу (то есть один овал на проективной плоскости).

Теперь построим другой пример, который покажет (что, впрочем, мы уже знаем), что у кривой 4 степени может быть и 3 овала тоже (что, в отличие от примеров с 2 и 4 овалами, уже не совсем очевидно). Возьмём на этот раз не все коэффициенты, выбрав триангуляцию и расстановку знаков следующим образом:

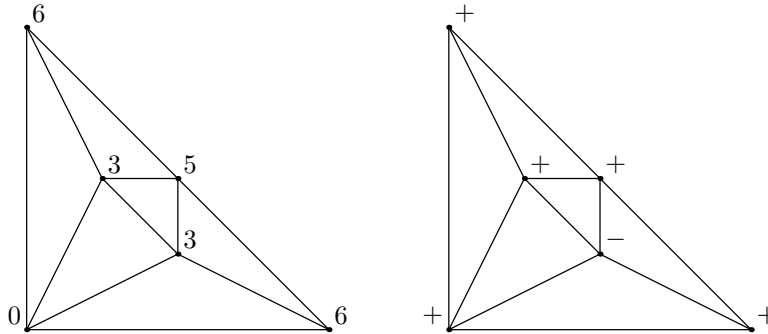


Рис. 4: Более сложная функция φ и исходная расстановка знаков для примера степени 4

Не очень сложное упражнение — проверить, что заданные для функции φ значения и впрямь позволяют достроить выпуклую функцию с данными треугольниками линейности, но эта проверка остаётся читателям. Получаем многочлен

$$Q_\varepsilon(x, y) = 1 - \varepsilon^3 x^2 y + \varepsilon^3 x y^2 + \varepsilon^5 x^2 y^2 + \varepsilon^6 x^4 + \varepsilon^6 y^4.$$

Соответствующая ему схема, действительно с тремя овалами, изображена на рис. 5.

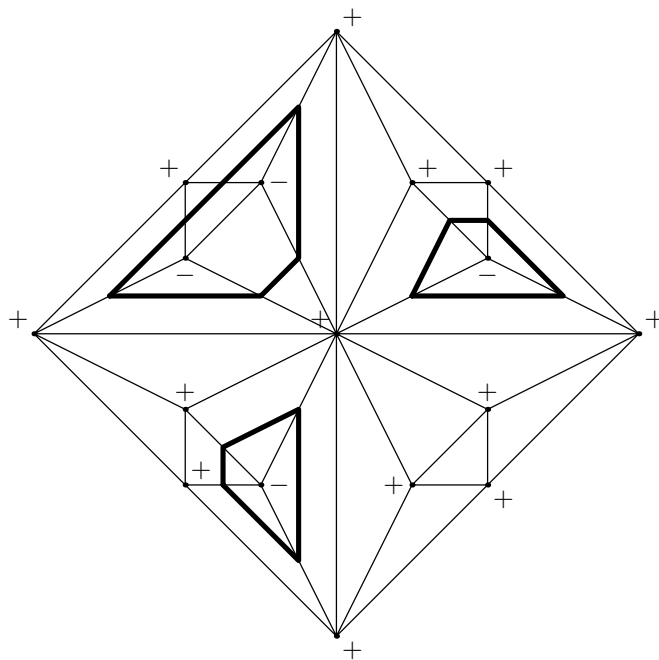


Рис. 5: Patchworking: три овала

Список литературы

- [1] I. V. Itenberg, O. Ya. Viro, Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture, *Math. Intelligencer*, **18** (1996), no. 4, pp. 19–28.
- [2] O. Ya. Viro, Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7. *Topology (Leningrad, 1982)*, 187–200, *Lecture Notes in Math.*, **1060**, Springer, Berlin, 1984.
- [3] R. M. Fedorov, Lower bounds for the number of orbital topological types of planar polynomial vector fields “modulo limit cycles”. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. *Mosc. Math. J.* **1** (2001), no. 4, pp. 539–550, 644.
- [4] В. И. Арнольд, Что такое математика? МЦНМО, 2002.

- [5] Yu. S. Pyashenko, Centennial History of Hilbert's 16th problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (2002), no. 3, pp. 301-354.
Ю. С. Ильяшенко, Столетняя история 16-й проблемы Гильберта, в сборнике: Семинар "Глобус". Общематематический семинар. Вып. 1. Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. МЦНМО, 2004.
- [6] H. Dulac, Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France* **51** (1923), pp. 45-188.
- [7] Проблемы Гильберта, сборник под общей ред. П. С. Александрова, М.:Наука, 1969.