Теория инвариантов. Листок 2

В этом листке K обозначает поле характеристики нуль.

Задача 1. (а) Пусть $\gamma \in GL(n, K)$. Докажите, что отображение

$$\phi_\gamma : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n] : P \mapsto P^\gamma$$

есть автоморфизм кольца многочленов (то есть изоморфизм кольца в себя).

(б) Докажите, что отображение $\gamma \mapsto \phi_\gamma$ есть гомоморфизм

$$G \to \mathrm{Aut}(K[x_1, \ldots, x_n]).$$

Задача 2. Пусть G — конечная подгруппа $GL(n, \mathbb{R})$. Докажите, что найдется такая евклидова структура на $\mathbb{R}^n$, что G — подгруппа соответствующей ортогональной группы. (Указание: используйте отображение M).

Задача 3. Докажите, что BC_n, D_n и $I_2(p)$ (а) группы; (б) порождены отражениями; (в) опишите инвариантные многочлены; (г) найдите образующие кольца инвариантов.

Задача 4. Каким группам $G(m, p, n)$ изоморфны группы BC_n, D_n и $I_2(p)$?

Задача 5. Пусть $G \subset GL(n, \mathbb{R})$. Пусть $s_1, \ldots, s_N$ — все отражения, содержащиеся в G. Пусть $H_1, \ldots, H_N$ — соответствующие гиперплоскости. *Камерами Вейля* называются компоненты связности множества

$$\mathbb{R}^n \setminus (\cup_i H_i).$$

Опишите одну из камер Вейля в случае, когда G одна из групп A_n, BC_n и $I_2(p)$, D_n.