Теория инвариантов. Листок 1

В этом листке K обозначает поле характеристики нуль.

Задача. Пусть $\gamma = 2\,\mathrm{I}d$ — скалярная матрица. Докажите, что не существует непостоянного многочлена, инвариантного относительно γ.

Задача. Пусть $G = \{-\mathrm{I}d, \mathrm{I}d\}$.
(а) Докажите, что многочлен инвариантен относительно G тогда и только тогда, когда у него отсутствуют однородные компоненты нечетных степеней.
(б) Докажите, что все инвариантные многочлены выражаются через многочлены x^2, xy, y^2 и константы при помощи операций сложения и умножения.
(в) Не существует двух инвариантных многочленов таких, что все инвариантные многочлены выражаются через них и константы. (Указание: рассмотрите вторые частные производные.)

Задача. Найдите все идеалы (а) в поле; (б) в кольце многочленов от одной переменной.

Задача. Рациональная функция с коэффициентами в поле K — это функция, являющаяся отношением двух многочленов. Пусть A — кольцо рациональных функций, определенных в нуле, то есть функций вида f/g, где f и g — многочлены, причем $g(0) \neq 0$. Докажите, что:
(а) A — кольцо;
(б) кольцо A не является конечно порожденным над K;
(в) кольцо A — нетерово.

Задача. (а) Докажите, что многочлен $x_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ не содержится в идеале, порожденном многочленами $x_1, \ldots, x_{n-1}$. (Указание: предположите противное, и подставьте $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ в соответствующее равенство.)
(б) Докажите, что кольцо многочленов от бесконечного числа переменных не является нетеровым.

Задача. Теорема: если A — нетерово кольцо, то $A[x]$ (кольцо многочленов с коэффициентами из A) — тоже нетерово. Цель этой задачи — доказать теорему. Итак, пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $A[x]$.
(а) Обозначим через $\mathfrak{b}$ множество всех старших коэффициентов многочленов (всех степеней) из $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{b}$ — идеал.
(б) Пусть $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ и пусть $f_i \in \mathfrak{a}$ — многочлен со старшим коэффициентом b_i. Пусть N — максимальная из степеней многочленов f_i. Докажите, что для любого $g \in \mathfrak{a}$ найдется h такой, что $g - h \in (f_1, \ldots, f_n)$ и $\deg h < N$.
(в) Пусть $\mathfrak{a}_i$ — множество старших членов многочленов степени не больше i. Докажите, что $\mathfrak{a}_i$ — идеал.
(г) Докажите теорему.