Отчет по гранту фонда Династия за 2016 год

Артур Томберг

1 Результаты, полученные в этом году

Гиперкэлерова структура на гладком многообразии M задается тройкой интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, и римановой метрикой g, эрмитовой по отношению к этим трем структурам, и такой, что соответствующие эрмитовы формы замкнуты. Нетрудно видеть, что на таком многообразии имеется целая 2-сфера интегрируемых почти-комплексных структур

$$S^2 = \left\{ aI + bJ + cK : a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\},$$

называемых индуцированными структурами. Произведение $M \times S^2$, параметризующее индуцированные структуры в точках M, называется твисторным пространством гиперкэлерова многообразия и обозначается через $\mathrm{Tw}(M)$. Отождествляя S^2 с $\mathbb{CP}^1$, можно показать, что на $\mathrm{Tw}(M) = M \times \mathbb{CP}^1$ есть естественная комплексная структура, такая что проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ голоморфна. Кроме этого, на $\mathrm{Tw}(M)$ имеется естественная эрмитова метрика произведения. Соответствующая эрмитова форма ω не является кэлеровой, однако, как было доказано Д. Калединым и М. Вербицким в статье “Non-Hermitian Yang-Mills connections” (1996), она удовлетворяет более слабому условию сбалансированности: $d\omega^{n-1} = 0$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tw}(M)$. Сбалансированность многообразия $\mathrm{Tw}(M)$ является достаточным условием для корректного определения степени векторного расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, которая задается формулой

$$\deg(E) = \int_{\mathrm{Tw}(M)} c_1(E) \wedge \omega^{n-1}.$$

В свою очередь, понятие степени позволяет дать определение стабильности: голоморфное векторное расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ называется стабильным, если для любого (когерентного) подпучка $\mathcal{F} \subseteq E$ удовлетворяется неравенство

$$\frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} < \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}.$$

Пространство модулей стабильных расслоений на многообразии обладает адекватной геометрической структурой, и изучение этого пространства является одной из центральных тем в современной геометрии. Таким образом, имеет смысл изучать стабильные расслоения на $\mathrm{Tw}(M)$ и их ограничения на слои твисторной проекции

$\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, которые представляют из себя копии M с комплексными структурами, индуцированными гиперкэлеровой структурой.

В вышеуказанной статье Каледина и Вербицкого доказывается, среди прочего, что если расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ стабильно ограничивается на хотя бы один слой твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, оно будет стабильно и как расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$, более того, оно не будет иметь подпучков строго меньшего ранга (в данном случае, мы называем расслоение E простым). Основным направлением моей научной деятельности в этом году была работа над доказательством обратного утверждения о том что для простого расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, ограничение $E_I = E|_{\pi^{-1}(I)}$ будет стабильным расслоением на "общем" слое $I \in \mathbb{CP}^1$, для некоторого определения общности.

Первым шагом в данном направлении было доказательство того, что для расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, рассматриваемого как семейство расслоений на слоях проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, послойная стабильность является открытым по Зарисскому условием на базе $\mathbb{CP}^1$. Данный факт нетривиален, так как твисторное пространство не является алгебраическим многообразием (более того, оно не является даже кэлеровым многообразием, см. выше), и таким образом, мы не можем использовать результат об открытости по Зарисскому условия стабильности в алгебраической категории, в то время как в категории комплексных многообразий, стабильность является открытым условием лишь в классической топологии. Доказательство этого факта является обобщением аргумента А. Телемана из статьи "Families of holomorphic bundles" (2008), в которой открытость по Зарисскому условия стабильности доказывается для семейств вида $X \times Y \to Y$, где X, Y - комплексные многообразия, удовлетворяющие некоторым условиям. Этот результат нельзя применить напрямую к твисторному семейству $\mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, так как $\mathrm{Tw}(M)$ не является произведением M и $\mathbb{CP}^1$ как комплексных многообразий, однако, оказывается, что аргумент Телемана работает и в случае твисторной проекции. Таким образом, искомое понятие общности элементов $\mathbb{CP}^1$, о котором говорилось выше, соответствует обычному понятию общего элемента на $\mathbb{CP}^1$ в алгебраической геометрии.

Используя этот факт, достаточно показать, что не существует простого расслоения E на $\mathrm{Tw}(M)$, нестабильно ограничивающегося на все слои твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$. Рассуждая от противного и используя взаимно-однозначное соответствие между подпучками $\mathcal{F} \subseteq E$ ранга s и линейными подпучками $L \subseteq \Lambda^s E$, лежащими в подмножестве $C^s(E) \subseteq \Lambda^s E$ внешних мономов, можно показать, что существует линейное расслоение L на $\mathrm{Tw}(M)$ и число $1 \leq s \leq \mathrm{rank}(E)$, такие что для каждого $I \in \mathbb{CP}^1$, существуют нетривиальные морфизмы

$$L_I = L|_{\pi^{-1}(I)} \longrightarrow C^s(E_I) \subseteq \Lambda^s(E_I).$$

Это эквивалентно тому, что в проективизации расслоения прямого образа $\pi_*(L^* \otimes$

$\Lambda^s E)$ над $\mathbb{CP}^1$, подмножество

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{P}(\pi_*(L^* \otimes \Lambda^s E)) \arrow[d] \\ & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

элементов, соответствующих морфизмам $L_I \to \Lambda^s(E_I)$ с образом в $C^s(E_I)$, является алгебраическим многообразием и отображается сюръективно на $\mathbb{CP}^1$. Сечения $V \to \mathbb{CP}^1$ соответствуют нетривиальным подпучкам $\mathcal{F} \subseteq E$ на $\mathrm{Tw}(M)$. Если ранг E равен двум или трем, такие сечения существуют всегда (следствие того, что все внешние степени такого E состоят из мономов), для случая $\mathrm{rank}(E) > 3$ нужен дополнительный аргумент с переходом к разветвленному накрытию $f : X \to \mathbb{CP}^1$, над которым существует сечение V, из чего в дальнейшем получается противоречие к простоте E.

Кроме этой работы, был построен пример стабильного расслоения на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ для M K3-поверхности, которое нестабильно ограничивается на все слои твисторной проекции. Таким образом, из стабильности E на $\mathrm{Tw}(M)$ не следует послойная стабильность.

Все эти результаты описаны в препринте [1], который в данный момент находится в состоянии окончательной правки перед отправлением в рецензируемый журнал.

2 Опубликованные и поданные в печать работы, препринты

[1] A. Tomberg, "A result on fibrewise stability of vector bundles on twistor spaces of hyperkähler manifolds", preprint

3 Участие в конференциях и школах

1. Воркшоп "Monge-Ampere equation and Calabi-Yau manifolds", 23-27 мая 2016, НИУ ВШЭ (Москва)

2. Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия", 25-31 июля 2016, ЯГПУ (Ярославль)

3. Воркшоп "Algebraic Geometry: Old and New", 26-30 сентября 2016, CMI (Оксфорд)

4. Конференция "Brussels-London geometry seminar", 3 ноября 2016, University College (Лондон)

4 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь членом научно-учебной группы НИУ ВШЭ “Геометрические структуры на комплексных многообразиях” и стажером-исследователем Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ. Провел осенний семестр (сентябрь-декабрь) в Брюссельском свободном университете (Université Libre de Bruxelles), где работал под руководством М. Вербицкого.

5 Педагогическая деятельность

В этом году я занимался исключительно научной деятельностью.