

# Научный отчет за 2015 год

Александра Скрипченко

5 декабря 2015 г.

## 1 Научные результаты

Моя научная работа в 2015 году в основном была посвящена двум задачам: изучению бильярдов с односторонними перегородками (проект с Serge Troubetzky, Марсель, Франция) и исследованию хаотических режимов в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей (проекты с Иваном Дынниковым, Институт математики им. Стеклова, РАС, Москва и с Артуром Авиллой, Париж, Франция, и Паскалем Юбером, Марсель, Франция).

Бильярды с односторонними перегородками - это бильярды в многоугольниках, которые содержат дополнительные прямолинейные перегородки, обладающие следующим свойством: при ударе о, например, левую сторону такой перегородки частица меняет направление по закону геометрической оптики, а если удар произошел справа, то частица продолжает движение без изменений. В общей постановке задачи многоугольники не являются рациональными (то есть их углы могут быть любыми, не обязательно иметь вид  $\frac{p\pi}{q}$ ).

Такие бильярды впервые были описаны М. Бошерницаном и И. Корнфельдом в 1994 году в связи с так называемыми interval translation mappings (отображениями сдвигов отрезков) - одного из обобщений известного понятия перекладывания отрезков. Тем не менее, ключевые эргодические и топологические свойства этих бильярдов остаются неизученными.

В нашей работе мы показываем, что топологическая энтропия таких бильярдов равна нулю. Аналогичный результат для классических бильярдов в многоугольниках был впервые доказан А. Катком. Ключевое отличие системы, с которой работали мы, состоит в необратимости - перегородки лишают нас возможности напрямую работать с "прошлым" рассматриваемой динамической системы.

Кроме того, как и для классических бильярдных систем, естественно рассмотреть символическую динамику, ассоциированную с нашей динамической системой (каждая бильярдная траектория может кодироваться, например, последовательностью компонент границы - сторон и перегородок, о которые она ударяется в процессе движения частицы) и задать вопрос о комбинаторной сложности для этой символической динамики. В нашей работе мы доказываем некоторые полиномиальные и субэкспоненциальные оценки на сложность для столов специального вида.

Задача С. П. Новикова, сформулированная в 1982 году в связи с изучением полуклассического движения электрона в магнитном поле, состоит в следующем: рассматривается 3-периодическая поверхность в  $\mathbb{R}^3$  (то есть такая, которая инвариантна относительно сдвига на векторы некоторой решетки) и ее сечения плоскостями, ортогональными фиксированному направлению. Это направление с точки зрения физики является направлением магнитного поля, а сама поверхность - это поверхность Ферми. Нас интересует поведение полученных сечений.

Как было показано в работах А. Зорича и И. А. Дынникова, принципиально возможно три варианта поведения указанных сечений: тривиальный (когда все они компактны), интегрируемый (когда сечения являются слегка возмущенными прямыми) и хаотический (когда сечения не имеют четко выраженного асимптотического направления). В настоящее время все открытые вопросы связаны с хаотическими сечениями.

Легко видеть, что эта задача может быть переформулирована в терминах измеримых слоений на поверхностях: факторизация по решетке приведет к тому, что вместо исследования поведения сечений мы можем сосредоточиться на изучении поведения слоев слоения, заданного 1-формой на 3-мерном торе и индуцированного на вложенный в этот тор поверхности.

В работе 2015 года мы строим пример хаотического сечения, обладающего целым рядом дополнительных симметрий, важных с точки зрения физики, для которого существует асимптотическое направление в слабом смысле, а соответствующее слоение не является строго эргодичным (то есть допускает 2 инвариантные меры).

Кроме того, в 2015 году вместе с Паскалем Юбером (Pascal Hubert) и Артуром Авилой мы продолжали работу над изучением специального класса хаотических режимов, связанных с так называемым Rauzy Gasket - двумерным фракталом. Мы построили инвариантную меру, носителем которой является Rauzy Gasket, и с помощью техники показателей Ляпунова показали, что для рассматриваемого нами множества наличие слабого асимптотического направления для хаотического режима явля-

ется общим свойством по отношению к построенной мере.

## 2 Опубликованные и поданные в печать работы

- Symmetric band complexes of thin type and chaotic sections which are not actually chaotic (с Иваном Дынниковым), Trans. Moscow Math. Soc., Vol. 76, no. 2, 2015, 287–308, arXiv: 1501.06866;
- Entropy and complexity of polygonal billiards with spy mirrors (с Сержем Трубецким), Nonlinearity, Vol. 28, 2015, 3443–3456; arXiv: 1501.04584.
- Diffusion for chaotic plane sections of 3-periodic surfaces (с Артуром Авилой и Паскалем Юбером), подано в Inventiones Mathematicae, arXiv: 1412.7913.

## 3 Работа в научных центрах и международных группах

В январе 2015 года я работала в Марселе с Паскалем Юбером.

В феврале 2015 года по приглашению Антона Зорича я работала в Париже (институт математики Жюссье).

В феврале 2015 года мне присудили стипендию Мечникова для российских исследователей, сотрудничающих с французскими коллегами, и в марте-мае 2015 года я работала в Марселе с Паскалем Юбером и Сержем Трубецким. В марте 2015 года я принимала участие в Париже в коллоквиуме лаборатории LIAFA.

В июле 2015 года я принимала участие в работе конференции по тейхмюллеровой динамике в Марселе (CIRM).

В сентябре 2015 года я участвовала в международной конференции "Dynamics, Combinatorics, Representations" в Санкт - Петербурге.

## 4 Педагогическая деятельность

Весной 2015 года я была научным руководителем выпускной квалификационной работы студента 4 курса МИЭМ НИУ ВШЭ Ильи Золотухина. Темой работы были бильярды в треугольнике. Для конкретного примера тупоугольного треугольника с рациональными углами было доказано, что множество периодических траекторий плотно. Кроме того, я была

рецензентом ВКР студентки 4 курса факультета математики ВШЭ Елизаветы Аржаковой (научной руководитель - М. С. Вербицкий).

В осеннем семестре 2015 года я преподаю курс теории вероятностей на факультете математики ВШЭ (веду семинары) для студентов 3 курса и математический практикум для 1 курса, а также совместно с А. Клименко, А. Буфетовым, А. Дымовым и Г. Ольшанским организую студенческий семинар "Геометрия и динамика".

Кроме того, я руковожу совместно с М. С. Вербицким научной работой студентки магистратуры факультета математики ВШЭ Е. Аржаковой. В настоящее время она работает над изучением инвариантных мер для перекладываний отрезков с флипами. Я также являюсь руководителем нескольких курсовых работ студентов 3 курса факультета математики ВШЭ (В. Крачун, М. Яхлаков).