ОТЧЕТ

по гранту фонда „Династия“ для молодых математиков за 2016 г.

Юлия Мешкова

(*Санкт-Петербургский государственный университет*)

juliavmeshke@yandex.ru

Проект относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). Изучается поведение решений задач с быстро осциллирующими коэффициентами. Классический результат теории усреднения — сходимость в пределе малого периода решений задачи с быстро осциллирующими коэффициентами к решению эффективной задачи с постоянными коэффициентами. Нас интересуют операторные оценки погрешности в теории усреднения. Это результаты о сходимости соответствующих разрешающих операторов (резольвенты в эллиптическом случае и операторной экспоненты — в параболическом) по операторной норме. Интерес к результатам такого рода возник после появления серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, разработавших теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам усреднения. Настоящее исследование опирается на этот подход.

1. Результаты, полученные в этом году

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций f используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный эллиптический дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$ второго порядка, заданный выражением

$$B_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})$$

при условии Дирихле на границе. Коэффициенты g, a_j, Q периодичны относительно решетки Γ. Матрица коэффициентов $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ ограничена и положительно определена. Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ (где b_j — постоянные $(m \times n)$-матрицы), причем $m \geqslant n$ и $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Матричные коэффициенты a_j и $Q = Q^*$ принадлежат подходящим $L_p(\Omega)$-классам. При сделанных предположениях оператор $B_{D,\varepsilon}$ сильно эллиптичен. Предполагается, что $B_{D,\varepsilon} \geqslant 0$.

Нас интересует поведение при малом ε обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная матрица.

Теорема 1 ([MSu1]). *Пусть $\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. При достаточно малом ε справедливы аппроксимации*

$$\| (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1(\phi) \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\| (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta) \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_2(\phi) \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_3(\phi) \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь B_D^0 — эффективный оператор с постоянными коэффициентами, $\overline{Q_0} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Оператор $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — корректор. Он содержит быстро осциллирующие множители и потому *зависит от ε. При этом $\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$ для фиксированного ζ и $\varepsilon \to 0$. Величины $C_1(\phi)$, $C_2(\phi)$ и $C_3(\phi)$ допускают контроль через данные задачи и $\phi = \arg\zeta$. Оценки (1), (2) равномерны по углу ϕ в любой области вида $\{\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\}$, $\phi_0 > 0$. Т. е. в этой области $C_j(\phi) \leqslant C_j(\phi_0)$, $j = 1, 2, 3$.*

Результаты подобного сорта принято называть операторными оценками погрешности в теории усреднения. При фиксированном ζ оценка (1) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (2) хуже из-за влияния границы области. Кроме результатов теоремы 1, справедливых при $|\zeta| \geqslant 1$, получены также оценки в более широкой области изменения параметра ζ, имеющие другое поведение относительно ζ. Результаты применяются к усреднению решений эллиптических систем.

Метод доказательства основан на использовании результатов усреднения [MSu1] для оператора, действующего во всем пространстве, введении поправки типа пограничного слоя и тщательной оценке интегралов по ε-окрестности $\partial\mathcal{O}$.

Получение двухпараметрических (относительно ε и ζ) оценок нацелено на приложения к параболическим задачам.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованы работы [MSu1, MSu2], поданные в печать до того, как проект получил поддержку. Подготовлен препринт [MSu3].

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия, 8 – 12 июля 2016 г.). (Устный доклад.)
2. A trilateral German-Russian-Ukrainian summer school „Spectral Theory, Differential Equations and Probability“ (Johannes Gutenberg Universität Mainz, Germany, September 4th – 15th 2016). (45-минутный устный доклад.)
3. Международная конференция „XXVII Крымская Математическая Школа-Симпозиум по спектральным и эволюционным задачам“ (Батилиман (Ласпи), Россия, 17 – 29 сентября 2016 г.). (Устный доклад.)
4. С.-Петербургский семинар по динамике, СПбГУ, лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербург, 10 октября 2016 г.
5. Семинар кафедры высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ, ПОМИ, Санкт-Петербург, 19 октября 2016 г.
6. Research seminar „Asymptotics, Operators and Functionals“, University of Bath, Bath, United Kingdom, 31 October 2016.
7. Mathematical Physics and Harmonic Analysis Seminar, Texas A&M University, USA, 17 November 2016.

4. Работа в научных центрах

Инженер-исследователь в лаборатории имени П. Л. Чебышева, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет.

5. Педагогическая деятельность

С февраля 2016 г. — преподаватель кафедры математических и информационных технологий Санкт-Петербургского академического университета — научно-образовательного центра нанотехнологий РАН.

Список литературы

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in* $\mathbb{R}^d$, Applicable Analysis **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Applicable Analysis **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MSu3] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений задачи Дирихле для эллиптических систем: двухпараметрические оценки погрешности*, препринт С.-Петербургского математического общества (2016).