Отчет за 2015 год
по гранту фонда «Династия» для молодых математиков
Федоровского Константина Юрьевича

1. Результаты, полученные в 2015 году

В 2015 году я занимался задачами аппроксимации функций полианалитическими многочленами, т.е. многочленами вида

$$P_0(z) + \overline{z}P_1(z) + \cdots + \overline{z}^m P_m(z),$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_m$ — многочлены комплексного переменного. Аппроксимация в этих задачах рассматривается в пространствах непрерывных, гладких или суммируемых функций на компактных подмножествах комплексной плоскости, причем речь идет о так называемых "качественных" задачах аппроксимации для "классов функций". В таких задачах необходимо найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых всякая функция, определенная на X и удовлетворяющая естественным необходимым условиям приближаемости, может быть приближена на X требуемым образом.

Эта тематика возникла в 1970-1980-х годах, в связи с работами А. Г. О'Фаррелла, Д. Вердеры, Д. Кармоны, Т. Трента и других авторов о плотности в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на данном компакте $X \subset \mathbb{C}$ рациональных модулей, т.е. пространств функций вида $\overline{z}^m R_m(z) + \cdots + \overline{z}R_1(z) + R_0(z)$, где $R_0, \ldots, R_m$ — рациональные функции комплексного переменного с полюсами вне X. В дальнейшем эта тематика развивалась в рамках общей теории приближений функций решениями однородных эллиптических уравнений в частных производных с постоянными комплексными коэффициентами на плоских компактах.

Важно отметить, что в задаче о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленам впервые в тематике аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений возникли условия приближаемости, которые не могут быть сформулированы в терминах метрических, топологических и емкостных характеристик компакта, на котором осуществляется аппроксимация. В этом случае требуется привлекать новые специальные аналитические характеристики компактов в $\mathbb{C}$.

Основное внимание в 2015 году было уделено случаю аппроксимации полианалитическими многочленами с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного (типа лакунарности), т.е. многочленам вида

$$P_0(z) + P_1(z)\overline{z}^{k_1} + \cdots + P_m(z)\overline{z}^{k_m},$$

где $k_1, \ldots, k_m$ — целые числа, причем $k_1 < \cdots < k_m$.

Опишем кратко полученные мной в 2015 году основные результаты. Одним из основных полученных в этом году результатов является следующее утверждение:

Пусть $d \geq 1$ — целое число, а X — компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:

1) *Всякая функция $f \in C(X)$ вида $f(z) = \overline{z}^d f_1(z) + f_0(z)$, где f_0, f_1 — голоморфные в X° функции, может быть равномерно на X приближена многочленами вида $\overline{z}^d P_1(z) + P_0(z)$, где P_0, P_1 — многочлены комплексного переменного*;

2) *Каждая ограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ не является d-неванлинновской областью.*

Напомним, что компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется компактом Каратеодори, если $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это объединение X и всех ограниченных (связных) компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$.

Свойство области быть d-неванлинновской — это специальная аналитическая характеристика плоских односвязных областей в $\mathbb{C}$. Это свойство состоит в следующем: Ограниченная односвязная область G называется d-неванлинновской, если существуют такие функции $u, v \in H^\infty(G)$, что равенство $\overline{z}^d = u(z)/v(z)$ выполняется почти всюду на ∂G в смысле конформного отображение. Последнее означает, что для почти всех точек ζ, $|\zeta| = 1$, выполняется равенство угловых граничных значений $\overline{\varphi(\zeta)} = (u \circ \varphi)(\zeta)/(v \circ \varphi)(\zeta)$, где φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\{\zeta\colon |\zeta| < 1\}$ на G.

При $d = 1$ понятие d-неванлинновской области превращается в понятие неванлинновской области, введенное в моих предшествующих работах в связи с задачами аппроксимации функций полианалитическими многочленами общего вида.

Интересной и важной представляется связь понятия d-неванлинновской области с теорией модельных пространств — инвариантных относительно оператора обратного сдвига подпространств пространства Харди H^2 (каждое такое пространство имеет вид $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$, где Θ — некоторая внутренняя функция).

Установлено, что *класс конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на d-неванлинновские области совпадает с классом ограниченных однолистных в единичном круге функций φ таких, что $\varphi^d \in K_\Theta$ для некоторой (своей для каждой φ) внутренней функции Θ.*

Ряд результатов о существовании ограниченных однолистных функций в модельных пространствах K_Θ был получен ранее мной совместно с А. Д. Барановым (Труды МИАН, 2006; Матем. сб., 2011). В ходе дальнейшей работы над проектом планируется полностью решить этот вопрос.

Естественный вопрос о существовании d-неванлинновский областей, которые не являются неванлинновскими, привел к задаче об извлечении корня в модельных пространствах K_Θ. Эту задачу удалось полностью решить. Соответствующий критерий приведен в работе [3] (здесь он не формулируется так как его формулировка требует введения целого ряда дополнительных понятий).

Интересно сравнить полученный результат с критерием равномерной приближаемости функций полианалитическими рациональными функциями вида $\overline{z}^d R_1(z) + R_0(z)$.

При $d = 1$ задача описания компактов $X \subset \mathbb{C}$ таких, что всякая функция $f \in C(X)$ вида $f(z) = \overline{z}^d f_1(z) + f_0(z)$, где f_0, f_1 — голоморфные в X° функции, может быть равномерно на X приближена функциями вида $\overline{z}^d R_1(z) + R_0(z)$, где R_0, R_1 — рациональные функции функции комплексного переменного с полюсами вне X, — это хорошо известная задача, поставленная Д. Вердерой в 1993 г. Она была решена М. Я. Мазаловым (Матем. сб., 2004): соответствующая аппроксимация возможна *на любом компакте $X \subset \mathbb{C}$*. В работе [3] было показано, что соответствующий результат остается справедливым и при целых $d > 1$.

Кроме того, в работе [3] были получены необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости функций на границах областей Каратеодори (см. ниже) полианалитическими многочленами вида $P_0(z) + P_1(z)\overline{z}^{k_1} + \cdots + P_m(z)\overline{z}^{k_m}$. Эти результаты (их формулировки здесь не приводятся так как соответствующие результаты пока не являются окончательными) также формулируются в терминах d-неванлинновских областей при $d = \gcd\{k_1, \ldots, k_m\}$. Кроме того получен ряд результатов о L^p-приближаемости, $1 \le p < \infty$, функций полианалитическими многочленами рассматриваемого вида. Оказалось, что понятие d=неванлинновской области играет важную роль и в этом случае.

В связи с изучаемыми задачами возник интерес к изучению свойств множеств (областей и компактов) Каратеодори. В опубликованной в 2015 году работе [1] классическая теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля распространена с круга на области Каратеодори. Доказано, в частности, что *всякая функция, непрерывная в замыкании данной области Каратеодори и удовлетворяющая в этой области ослабленному варианту принципа максимума модуля, является голоморфной в рассматриваемой области.*

Под ослабленным вариантом принципа максимума модуля понимается следующее условие: модуль значения функции во внутренней точке области не превосходит максимума модуля этой функции на границе данной области умноженной на константу, которая может зависть от рассматриваемой точки. Напомним, что ограниченная область в комплексной плоскости называется областью Каратеодори, если ее граница совпадает с границей неограниченной (связной) компоненты дополнения к замыканию рассматриваемой области. Необходимо отметить, что области Каратеодори - это наиболее широкий и естественный класс областей в комплексной плоскости, на который теорема Рудина может быть распространена. Существенным ингредиентом доказательства полученного результата являются мои недавние совместные с Д. Кармоной (Испания) результаты о свойствах конформных отображений областей Каратеодори на единичный круг.

В завершенной в 2015 году работе [4] рассматривается вопрос о возможном росте L^1-нормы на единичной окружности производной рациональной функции степени n, однолистной в единичном круге (данный вопрос тесно связан с задачей о строении границ неванлинновских и d-неванлинновских областей). Показано, что эта величина может расти степенным образом, как n^τ. Значение τ лежит между $B_b(1)$ и $1/2$, где величина $B_b(1)$ - это значение в точке 1 спектра интегральных средних для ограниченных однолистных функций. Напомним, что хорошо известная гипотеза Карлесона и Джонса говорит, что $B_b(1) = 1/4$ (на настоящий момент известно, что $0.23 < B_b(1) < 0.46$). Приведем формулировку соответствующего результата:

Пусть R — это рациональная функция степени n, голоморфная и однолистная в единичном круге. Тогда $\|R'\|_{L^1(\mathbb{T})} \le 6\pi\sqrt{n}\|R\|_\infty$ (здесь $\mathbb{T} = \{\zeta\colon |\zeta| = 1\}$). Далее, *для любого числа τ, удовлетворяющего условию $0 < \tau < B_b(1)$, найдется достаточно большое натуральное число n такое, что для некоторой рациональной функции R степени n, голоморфной и однолистной в единичном круге с $\|R\|_\infty \le 1$, имеет место оценка: $\|R'\|_{L^1(\mathbb{T})} \ge Cn^\tau$, где постоянная $C > 0$ зависит только от τ (но не от n).*

2. Опубликованные и поданные в печать работы

[1] К. Ю. Федоровский, “Области Каратеодори и теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля”, *Матем. сб.*, **206**:1 (2015), 175–190.

[2] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой”, *Алгебра и анализ*, **27**:5 (2015), 207–220.

[3] A. D. Baranov, J. J, Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Density of certain polynomial modules”, *J. Approx. Theory*, doi:10.1016/j.jat.2015.02.006 (опубликована on-line как “Article in press”, журнальная публикация ожидается в 2016).

[4] A. D. Baranov, K. Yu. Fedorovskiy, “On L^1-estimates of derivatives of univalent rational functions”, arXiv:1312.3312v4, to appear in *J. Anal. Math.*

3. Участие в конференциях и школах

Выступал с докладами на следующих конференциях:

1) “Conference on Harmonic Analysis, Function Theory, Operator Theory and Applications in honor of Jean Esterle”, 1–6 июня 2015, Бордо, Франция;
http://esterle.sciencesconf.org/conference/esterle/pages/conf_esterle_2.pdf
Доклад (25 минут, все доклады на этой конференции приглашенные): “Nevanlinna domains and density of certain polynomial modules”.

2) Конференция “Встреча поколений”, 9–11 июня 2015, Москва, Россия;
http://www.dynastyfdn.com/news/1277;
Доклад (45 минут): “Аппроксимация полианалитическими функциями”.

3) “24th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and a Summer School for Young Scientists”, 25–30 июня 2015, Санкт-Петербург, Россия;
http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma24/
Доклад (приглашенный, пленарный, 50 минут): “Caratheodory domains and Rudin's converse of the maximum modulus principle”.

4) “Workshop and Autumn School “Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2015)”, 12–15 октября 2015, Санкт-Петербург, Россия;
http://www.chebyshev.spb.ru/safsi2015/
Доклад (пленарный, 40 минут): “Carathéodory sets and their conformal mappings”.

5) “International conference Journees du GDR AFHP 30 ноября–4 декабря 2015, Марсель, Франция;
http://scientific-events.weebly.com/1403.html
Доклад (25 минут, все доклады на этой конференции приглашенные): “Approximative properties of polyanalytic polynomial modules”.

Также выступил с докладом “Carathéodory sets and their properties” на Барселонском семинаре по анализа (Seminari d'Anàlisi de Barcelona) 13 июля 2015 года.

Принимал участие (как член организационного комитетов) в организации конференции “Традиционная зимняя сессия МИАН–ПОМИ, посвященная теме “Комплексный анализ” (21–22 декабря 2015 года) и международной конференции памяти академика А. А. Гончара (23 декабря 2015 года).

4. Работа в научных центрах и международных группах

Принимал участие (как член жюри) в защите диссертации Habilitation à Diriger des Recherches Р. Заруфом (Rachid Zarouf) в Университете Марселя (2 декабря 2015 года).

Являюсь руководителем семинара (совместно с П. В. Парамоновым, МГУ им. М. В. Ломоносова) “Теория приближений аналитическими функциями” кафедры Теории функций и функционального анализа МГУ.

5. Педагогическая деятельность

Прочитаны курсы “Теория функций комплексного переменного”, “Линейная алгебра” (весна 2015 года), “Алгебра и элементы тензорного анализа” (осень 2015 года) в МГТУ им. Н. Э. Баумана, а также “Полиномиальная и рациональная аппроксимация в комплексной области” (осень 2015 года) в Санкт-Петербургском государственном университете.

Руковожу 2 аспирантами (1 в МГТУ им. Н. Э. Баумана и 1 в СПбГУ).