Отчет за 2017 год
по гранту фонда «Династия» для молодых математиков
Федоровского Константина Юрьевича

1. Результаты, полученные в 2017 году

В 2017 году я занимался задачами аппроксимации функций решениями общих однородных эллиптических систем уравнений второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами. Еще одно направление исследований было связано с задачей об описании модельных пространств, содержащих ограниченный однолистные функции.

1. На плоскости $\mathbb{C}$ рассматривается система дифференциальных уравнений вида
$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{1}$$
где A, B и C — вещественные 2×2-матрицы. Эта система предполагается эллиптической, т.е. определитель $\det(A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2)$ с вещественными ξ и η обращается в нуль только при $\xi=\eta=0$. Скажем, что функция $f=u+iv$ удовлетворяет системе (1), если этой системе удовлетворяет пара функций (u,v). Для данного множества $E\subset\mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{L}(E)$ пространство функций $f=u+iv$, каждая из которых определена и удовлетворяет (1) на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E.

Пусть $m\geqslant 0$ — вещественное число. Нас интересует следующая задача: описать компакты $X\subset\mathbb{C}$ такие, что всякая функция класса $C^m(X)\cap\mathcal{L}(X^\circ)$ (т.е. всякая функция класса C^m на X, удовлетворяющая системе (1) на внутренности X) может быть приближена в норме пространства $C^m(X)$ последовательностью функций класса $\mathcal{L}(X)$ или последовательностью многочленов класса $\mathcal{L}(\mathbb{C})$. Другими словами, в первом случае речь идет о приближении функциями, являющимися решениями системы (1) в окрестностях X, а во втором — о приближении полиномиальными решениями этой системы. Из эллиптичности системы (1) вытекает, что только функции класса $C^m(X)\cap\mathcal{L}(X^\circ)$ могут быть приближены в обоих указанных выше смыслах. Таким образом, нас интересует описание компактов X, для которых естественное необходимое условие приближемости оказывается достаточным для *всех* приближаемых функций. Такие задачи в теории аппроксимации аналитическими функциями традиционно называются задачами аппроксимации для «классов функций».

Обозначим через $D(a,r)$ круг с центром в точке $a\in\mathbb{C}$ и радиусом $r>0$. Для точки $z\in\mathbb{C}$ и для числа $r>0$ определим величину $d(z,r,X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $D(z,r)\setminus X$ и введем величину $\theta(X):=\inf\bigl\{d(z,r,X)/r\colon z\in\partial X,\ r>0\bigr\}$.

В 2017 году завершена и опубликована работа [8] (совместная с моим аспирантом А. О. Багапшем), в которой получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1. Если $\theta(X)>0$, то для любой функции f класса C^1 в некоторой окрестности компакта X, такой, что $f\in\mathcal{L}(X^\circ)$, найдется последовательность $\{f_n\}$ функций класса $\mathcal{L}(X)$ такая, что $f_n\to f$ и $\nabla f_n\to\nabla f$ равномерно на X при $n\to\infty$.

2. Следующие условия эквивалентны:

a) для любой функции f класса C^1 в некоторой окрестности компакта X, такой, что $f\in\mathcal{L}(X^\circ)$, найдется последовательность $\{g_n\}$ многочленов класса $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ такая, что $g_n\to f$ и $\nabla g_n\to\nabla f$ равномерно на X при $n\to\infty$;

b) множество $\mathbb{C}\setminus X$ связно.

Заметим, что необходимое и достаточное условие C^1-приближаемости полиномиальными решениями системы (1) в этой теореме аналогично по своей формулировке критерию С. Н. Мергеляна равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного.

Также отметим, что сходимость в теореме 1 в общем случае слабее сходимости в классическом пространстве $C^1(X)$ типа Уитни, для которого аналоги соответствующих аппроксимационных результатов пока не получены. Если X — такой компакт, что $X = \overline{X^\circ}$, то из сходимости в теореме 1 вытекает сходимость по норме пространства $C^1(X)$.

Кроме того, в 2017 году получены следующие достаточные условия равномерной приближаемости функций решениями системы (1). Пусть $\partial^* X$ — это множество $\{z \in \partial X \colon \theta_X(z) > 0\}$ при $\theta_X(z) = \inf \{d(z, r, X)/r \colon r > 0\}$.

Теорема 2. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1) Если $\partial X = \partial^* X$, то всякая функция класса $C(X) \cap \mathcal{L}(X^\circ)$ может быть равномерно на X приближена функциями класса $\mathcal{L}(X)$.

2) Если множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно, то всякая функция класса $C(X) \cap \mathcal{L}(X^\circ)$ может быть равномерно на X приближена полиномиальными решениями системы (1).

Приведем еще один результат, полученный в этом году в рассматриваемом направлении. Напомним, что система (1) называется сильно эллиптической, если определитель матрицы $A + 2B\xi + C\eta$ отличен от нуля при всех вещественных ξ и η с условием $\xi^2 \leq \eta$.

Скажем, что система (1) удовлетворяет свойству $\mathscr{A}$, если для любого компакта X в комплексной плоскости справедливо следующее утверждение — всякая функция f класса $C(X) \cap \mathcal{L}(X^\circ)$ может быть равномерно приближена на X последовательностью функций класса $\mathcal{L}(X)$. В 2008 г. М.Я. Мазалов доказал, что эллиптический оператор с постоянными комплексными коэффициентами на плоскости обладает свойством $\mathscr{A}$ в том и только том случае, когда он имеет локально ограниченное (в начале координат) фундаментальное решение. Хорошо известно, что последнее свойство эквивалентно тому, что такой оператор не является сильно эллиптическим.

Для систем (1) общего вида установлено, что такая система обладает свойством $\mathscr{A}$ в том и только том случае, когда система (1) является кососимметрической и не сильно эллиптической. Этот результат является полезным дополнением к цитированному результату Мазалова и показывает, что переход от кососимметрических систем к системам общего вида не расширяет класс систем, для которых выполнено свойство $\mathscr{A}$.

Наконец, в 2017 году начата также работа по изучению задачи о плотности полиномиальных решений системы (1) в пространстве непрерывных функций на компактах X в плоскости, имеющих несвязное дополнение. В этой задаче получен ряд предварительных результатов и новых примеров. Работу планируется продолжать.

Приведенные и упомянутые выше результаты изложены в работе, которая подана в журнал «Complex Variables and Elliptic Equations».

Заметим, что ранее задачи C^m-аппроксимации функций решениями эллиптических систем рассматривались, в основном, для систем (1), соответствующих однородным эллиптическим уравнениям второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами или, другими словами, для систем вида (1) с кососимметрическими матрицами. Аналоги утверждений теорем 1 и 2 для таких систем были установлены ранее в моей совместной с П. В. Парамоновым работе (Матем. сб., 1999). Случай общих систем рассматривался, например, Н. Н. Тархановым (Матем. сб., 1987).

2. Второе направление работы в 2017 году — это изучение задачи о существовании ограниченных однолистных функций в модельных пространствах, порожденных сингулярными внутренними функциями.

В связи с задачами равномерной и L^p-приближаемости функций полианалитическими многочленами возникло важное и интересное понятие неванлинновской области (см. отчеты по проекту за 2015 и 2016 годы). Не приводя формального определения скажем, что неванлинновская область — это образ единичного круга $\mathbb{D}$ при отображении ограниченной однолистной функцией, допускающей псевдопродолжение неванлинновского типа во внешность единичного круга.

Как было показано ранее, класс конформных отображений единичного круга на неванлинновские области совпадает с классом ограниченных однолистных в единичном круге функций φ таких, что $\varphi \in K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ для некоторой (своей для каждой φ) внутренней функции Θ. Пространства K_Θ называются модельными пространствами. Эти пространства (и только они) инвариантны относительно оператора обратного сдвига в H^2. Таким образом, при изучении неванлинновских областей возникла задача о существовании ограниченных однолистных функций в пространствах K_Θ. Эта задача представляет интерес и вне связи с понятием неванлинновской области, а просто как задача теории модельных пространств.

В 2017 году задача о существовании ограниченных однолистных функций в модельных пространствах была полностью решена. Приведем формулировку соответствующего результата.

Напомним, что множество $E \subset \mathbb{T}$ (где $\mathbb{T}$ — это единичная окружность) называется множеством Берлинга–Карлесона (или множеством Карлесона, или множеством с конечной энтропией), если $\int_{\mathbb{T}} \log \operatorname{dist}(\zeta, E)\, dm(\zeta) > -\infty$, где $m(\cdot)$ — мера Лебега на $\mathbb{T}$. В частности, $m(E) = 0$. Напомним также, что если $\mathbb{T} \setminus \bigsqcup_\ell I_\ell$ — дизъюнктное объединение открытых дуг, то E — множество Карлесона в том и только том случае, когда $\sum_\ell m(I_\ell) \log m(I_\ell)^{-1} < \infty$.

Теорема 3. *Пусть Θ — внутренняя функция в $\mathbb{D}$. Пространство K_Θ содержит ограниченные однолистные функции в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих двух условий:*

i) *Θ имеет ноль в $\mathbb{D}$;*

ii) *Θ — это сингулярная внутренняя функция, а сингулярная мера μ, задающая функцию Θ такова, что $\mu(E) > 0$ для некоторого множества Берлинга–Карлесона $E \subset \mathbb{T}$.*

Этот результат изложен в работе [10], совместной с Ю. С. Беловым, см. также [9].

Заметим, что условия теоремы 3 необходимы и достаточны для существования в пространстве K_Θ гладких функций (этот результат был доказан К. Дьяконовым и Д. Хавинсоном в 2006 году).

2. Реализация плана исследований на 2015–2017 гг.

Обсудим кратко реализацию плана исследований, предложенного в исходной заявке.

1. В задаче о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами планировалось получить новые результаты в случае, когда в качестве приближающих функций рассматриваются полианалитические многочлены с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного (типа лакунарности). Предполагалось рассмотреть аналогичную задачу и в случае аппроксимации в пространствах L^p.

В этой задаче были получены необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости на компактах Каратеодори. Эти результаты изложены в [4] и подробно описаны в отчете за 2015 год. Кроме того, удалось полностью решить задачу об извлечении корня в модельных пространствах K_Θ, тесно связанную (через понятия неванлинновской и d-неванлинновской областей) с полианалитической полиномиальной аппроксимацией (см. [4] и отчет за 2015 год).

Задача об аппроксимации функций полианалитическими многочленами с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного в пространствах L^p изучалась в [5]. Полученные в этой задаче результаты описаны в отчете за 2016 год.

Эти и другие результаты по аппроксимации полианалитическими многочленами вошли в книгу [1], изданную в 2016 году.

2. Планировалось решить задачу об описании модельных пространств K_Θ, содержащих ограниченных однолистные функции. Эта задача полностью решена в [9] и [10]. Формулировка соответствующего результата приведена выше (при описании результатов, полученных в 2017 году).

3. В связи с вопросом о граничной регулярности неванлинновских областей, планировалось изучить вопрос о возможном росте L^1-нормы на единичной окружности производной рациональной функции степени n, однолистной в единичном круге.

В 2017 году опубликована работа [7], в которой показано, что соответствующая величина может расти степенным образом, как n^τ. Значение τ лежит между $B_b(1)$ и $1/2$, где величина $B_b(1)$ - это значение в точке 1 спектра интегральных средних для ограниченных однолистных функций. Напомним, что хорошо известная гипотеза Карлесона и Джонса говорит, что $B_b(1) = 1/4$ (на настоящий момент известно, что $0.23 < B_b(1) < 0.46$). Этот результат подробно формулируется и обсуждается в отчете за 2015 год.

4. Предполагалось изучение свойств множеств Каратеодори в $\mathbb{C}$.

В опубликованной в 2015 году работе [2] классическая теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля распространена с круга на области Каратеодори (см. отчет за 2015 год, в котором приведена формулировка соответствующего результата). Важно отметить, что области Каратеодори - это наиболее широкий и естественный класс областей в комплексной плоскости, на который теорема Рудина может быть распространена.

В 2016 году была получена явная формула для аналитического выметания мер, носители которых являются подмножествами компактов Каратеодори (понятие аналитического выметания мер было введено в 1988 году Д. Хавинсоном). Этот результат изложен в статье [11] и в отчете за 2016 год.

На протяжении 2015–2017 гг. мной, совместно с Д. Кармоной (J. Carmona, Испания), ведется работа над большой обзорной статьей посвященной свойствам множеств Каратеодори. Ожидается завершение этой работы в 2018 году. Одна из глав книги [1] также посвящена свойствам областей и компактов Каратеодори.

5. Тематика аппроксимации функций решениями общих эллиптических систем (см. отчет за 2017 год выше) возникла в ходе выполнения проекта и не была включена в исходный план исследований.

3. Опубликованные работы

Монографии

[1] К. Ю. Федоровский, *Аппроксимация полианалитическими многочленами*, ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, 2016, ISBN: 978-5-98354-022-4, 197 с.

Статьи, опубликованные в 2015 году

[2] К. Ю. Федоровский, “Области Каратеодори и теорема Рудина об обращении принципа максимума модуля”, *Матем. сб.*, **206**:1 (2015), 175-190; K. Yu. Fedorovskiy, “Carathéodory domains and Rudins convers of the maximum modulus principle”, *Sb. Math.*, **206**:1 (2015), 161-174.

[3] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “Доказательство Х. Тверберга теоремы о замкнутой жордановой кривой”, *Алгебра и анализ*, **27**:5 (2015), 207–220; P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskiĭ, “Tverberg’s proof of the Jordan close curve theorem”, *St. Petersburg Math. J.*, **27**:5 (2016), 851-860.

Статьи, опубликованные в 2016 году

[4] A. D. Baranov, J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Density of certain polynomial modules”, *J. Approx. Theory*, **206** (2016), 1–16.

[5] К. Ю. Федоровский, “О плотности некоторых модулей полианалитического типа в пространствах суммируемых функций на границах односвязных областей”, *Матем. сб.*, **207**:1 (2016), 151–166; K. Yu. Fedorovskiy, “On the density of certain modules of polyanalytic type in spaces of integrable functions on the boundaries of simply connected domains”, *Sb. Math.*, **207**:1 (2016), 140–154.

[6] Е. В. Боровик, К. Ю. Федоровский, “О связи неванлинновских и квадратурных областей”, *Матем. заметки*, **99**:3 (2016), 460–464; E. V. Borovik, K. Yu. Fedorovskiy, “On relations between concepts of Nevanlinna and quadrature domains”, *Math. notes*, **99**:3 (2016), 460–464.

Статьи, опубликованные в 2017 году

[7] A. D. Baranov, K. Yu. Fedorovskiy, “On L^1-estimates of derivatives of univalent rational functions”, *J. Anal. Math.*, **132** (2017), 63–80.

[8] А. О. Багапш, К. Ю. Федоровский, “C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$”, *Тр. МИАН*, **298** (2017), 42–57; A. O. Bagapsh, K. Yu. Fedorovskiy, “C^1 approximation of functions by solutions of second-order elliptic systems on compact sets in $\mathbb{R}^2$”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **298** (2017), 35–50.

[9] Anton Baranov, Alexander Borichev, Konstantin Fedorovskiy, “Univalent functions in model spaces”, 2017, 12 с., arXiv: math/1705.05930v1.

Статьи, принятые к печати (выход ожидается в 2018 году)

[10] Ю. С. Белов, К. Ю. Федоровский, “Модельные пространства, содержащие однолистные функции”, *УМН*, 2018 (в печати); Yu. S. Belov, K. Yu. Fedorovskiy, “Model spaces that contain univalent functions”, *Russian Math. Surveys*, 2018 (to appear).

[11] К. Ю. Федоровский, “Множества Каратеодори и аналитическое выметание мер”, *Матем. сб.*, 2018 (в печати); K. Yu. Fedorovskiy, “Carathéodory sets and analytic balayage of measures”, *Sb. Math.*, 2018 (to appear).

4. Участие в конференциях, доклады на семинарах в 2017 году

Выступал с докладами на следующих конференциях:

1) Конференция «Hilbert spaces of entire functions and their applications», 22-26 мая 2017, Бендлево, Польша, `https://plas.mat.umk.pl/etcafa/hilbert.html`. Приглашенный доклад (30 минут) «Univalent functions in model spaces and in Paley-Wiener spaces».
2) Конференция «26th St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis and a Summer School for Young Scientists», 25-30 июня 2017, Санкт-Петербург, Россия, `http://gauss40.pdmi.ras.ru/ma26/`. Приглашенный пленарный доклад (45 минут) «Approximative properties of solutions of second order elliptic systems».

Выступал с докладами на следующих научных семинарах:

3) «Quadrature domains, their properties, and relations with Nevanlinna domains», January 23, 2017, *Séminaire d’Analyse et Géométrie*, Aix–Marseille Université, France.

4) «Модельные пространства, содержащие однолистные функции», 18 сентября 2017, *Семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина)*, МГУ, Москва, Россия.
5) «On dimension of boundaries of Nevanlinna domains», November 6, 2017, *Séminaire d'Analyse et Géométrie*, Aix–Marseille Université, France.

5. Педагогическая деятельность в 2017 году

Прочитаны курсы «Теория функций комплексного переменного» (весна 2017, МГТУ им. Н. Э. Баумана) и «Полиномиальная и рациональная аппроксимация в комплексной области» (осень 2017, Санкт-Петербургский государственный университет).

Руковожу 2 аспирантами (1 в МГТУ им. Н. Э. Баумана и 1 в СПбГУ).

6. Дополнительная информация (2017 год)

Являюсь руководителем семинара (совместно с П. В. Парамоновым, МГУ им. М. В. Ломоносова) «Теория приближений аналитическими функциями» кафедры Теории функций и функционального анализа МГУ.

Являюсь руководителем семинара «Анализ и дифференциальные уравнения» кафедры Прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Являюсь членом редколлегии журнала «Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки».