

Отчет по гранту фонда Династия за 2014 год.

Войнов Андрей.

1. Результаты, полученные в этом году.

Основными темами, которые изучались в этом году, были вопросы о структуре несжимающих ограниченных полугрупп аффинных операторов и матричных полугрупп с постоянным спектральным радиусом. Обе темы изучались совместно с В.Ю.Протасовым.

Рассматривались компактные мультипликативные полугруппы вещественных аффинных операторов, действующих в конечномерном пространстве. Было показано, что каждая такая полугруппа либо является сжимающей, то есть содержит элементы сколь угодно малой операторной нормы, либо все ее операторы имеют общее инвариантное аффинное подпространство, на котором она является сжимающей. Из этого результата были получены приложения к вопросам о структуре самоаффинных множеств, к описанию конечных аффинных полугрупп, а также к доказательству критерия примитивности семейства неотрицательных матриц.

Наш основной результат утверждает, что в любой компактной несжимающей полугруппе операторы имеют общее инвариантное аффинное подпространство. Более того, это подпространство пересекает инвариантное выпуклое тело полугруппы (то есть тело, чей образ под действием любого элемента полугруппы лежит в себе — для ограниченных полугрупп такое тело всегда существует). При этом ограничение полугруппы на это подпространство — сжимающее. В доказательстве применяется теория уравнений самоподобия. Для данной полугруппы операторов специальным образом строится функциональное уравнение со сжатием аргумента и доказывается, что у него есть суммируемое решение, после чего применяются условия существования решений таких уравнений.

С помощью этого утверждения получен ряд структурных теорем для некоторых специальных полугрупп. Получены описание семейств операторов, определяющих самоаффинные разбиения выпуклого тела, и классификация самоаффинных выпуклых тел для случаев, когда общее инвариантное подпространство аффинных операторов имеет размерность 1 или $d - 1$. Получены некоторые результаты о конечных аффинных полугруппах. Наконец, с помощью теоремы об инвариантной аффинной плоскости удалось получить простое и короткое доказательство критерия примитивности семейства неотрицательных матриц.

Другое направление исследований было связано с описанием структур матричных полугрупп, все элементы которых имеют постоянный спектральный радиус. Получен ряд новых результатов и обобщений результатов Раджави-Омладича по данной тематике.

Показано, что вопрос классификации таких полугрупп сводится по сути к вопросу классификации неприводимых полугрупп с постоянным спектральным радиусом, то есть не имеющих инвариантных подпространств. Показано, что все невырожденные элементы таких полугрупп подобны ортогональным в некотором выбранном базисе. Получена классификация всех невырожденных полугрупп с постоянным спектральным радиусом и полугрупп, действующих в пространствах малых размерностей. Для произвольных полугрупп с постоянным спектральным радиусом показано существование специальных инвариантных многообразий. Приведена гипотеза о строении произвольной полугруппы с постоянным спектральным радиусом. Установлена связь с некоторыми блужданиями на Евклидовой сфере.

Кроме этих двух тем велась работа о вопросах сходимости случайных произведений неотрицательных матриц. Для базисно-неприводимых полугрупп (то есть в предположении отсутствия инвариантных базисных подпространств) в некоторых незначительных предположениях исчерпывающий ответ дает теорема Перрона-Фробениуса для полугрупп. Изучался вопрос о сходимости произведений без предположения базисной неприводимости случайных матриц (т.е. допускаются блочные верхнетреугольные семейства матриц). Получен результат о том, что на предельное поведение влияют только диагональные блоки и установлена связь с неприводимым случаем.

2. Поданные в печать работы и препринты.

[1] With V.Protasov
On the noncontractive compact affine operator semigroups.
to appear in Mat.Sbornik.

[2] With V.Protasov
Matrix semigroups with constant spectral radius
arXiv:1407.6568 *submitted to Advances in Mathematics.*

3. Участие в школах.

- 4-я Летняя школа по геометрическим методам математической физики, Московская область, 24.06-27.06;

4. Педагогическая деятельность и другое.

Работаю ассистентом на кафедре общих проблем управления мехмата МГУ, помогаю в проведении семинаров и проведении экзаменов по вариационному исчислению. Участвую в приеме коллоквиумов на других факультетах.

Выступал на нескольких научных семинарах в МГУ.