

Отчет по гранту фонда “Династия” за 2014 год

Андрей Солдатенков

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

1.1. Абсолютно трианалитические подмногообразия в гиперкэлеровых многообразиях и k -симплектические структуры. Напомним, что гиперкэлерова структура на C^∞ -многообразии M — это тройка интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K , которые удовлетворяют кватернионным соотношениям $IJ = -JI = K$ и риманова метрика g , которая является кэлеровой относительно I, J и K . В дальнейшем мы будем всегда считать, что M компактно. Группа голономии связности Леви-Чивита на гиперкэлеровом многообразии является подгруппой в $Sp(n)$. Если она совпадает с $Sp(n)$, то многообразие M называют простым гиперкэлеровым, или неприводимым голоморфно-симплектическим многообразием. Такие многообразия имеют другое, эквивалентное данному определению. А именно, кэлерово многообразие M является неприводимым голоморфно-симплектическим тогда и только тогда, когда оно односвязно и пространство голоморфных 2-форм $H^0(M, \Omega_M^2)$ порождено симплектической формой σ . При этом комплексная размерность M является четной $\dim M = 2n$ и условие симплектичности означает, что σ^n задает тривиализацию канонического расслоения. Далее будем считать, что M — неприводимое голоморфно-симплектическое многообразие.

Заметим, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$, таких что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, оператор $L = aI + bJ + cK$ задает комплексную структуру на M , которую мы будем называть индуцированной действием кватернионов. Рассмотрим подмножество $Z \subset M$. Оно называется трианалитическим подмногообразием, если Z является комплексно-аналитическим подмногообразием в (M, L) для любой индуцированной комплексной структуры. Известно, что нормализация трианалитического подмногообразия является гладким гиперкэлеровым многообразием.

Условие трианалитичности можно интерпретировать следующим образом. Как известно, любое неприводимое голоморфно-симплектическое многообразие M имеет универсальную деформацию $\pi: \mathcal{M} \rightarrow U$, база которой гладкая. Можно считать, что U является шаром в \mathbb{C}^N . Множество индуцированных комплексных структур образует семейство — твисторное семейство — базой которого является $\mathbb{C}P^1$. Твисторное семейство определяет в базе универсальной деформации некоторую кривую $C \subset U$ (изоморфную некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{C}P^1$). Подмножество $Z \subset M$ является трианалитическим, если оно является комплексно-аналитическим подмножеством слоёв $\mathcal{M}_t = \pi^{-1}(t)$ для $t \in C$ (универсальное семейство диффеоморфно произведению $M \times U$ и все слои мы считаем отождествленными как C^∞ многообразия). Мы можем наложить более сильное условие: скажем что $Z \subset M$ является абсолютно трианалитическим, если оно является комплексно-аналитическим подмножеством слоёв \mathcal{M}_t для всех $t \in U$.

Можно показать, что если точка $t \in U$ выбрана достаточно общей, то все комплексные подмногообразия в слое \mathcal{M}_t являются абсолютно трианалитическими. Слова “достаточно общей” в данном случае означают, что t лежит в дополнении к объединению некоторого счетного семейства гиперповерхностей в U . Возникает вопрос, существуют ли какие-либо нетривиальные абсолютно трианалитические подмногообразия в гиперкэлеровых многообразиях. Положительный ответ на этот вопрос был получен Вербицким и Калединым, которые построили пример такого подмногообразия в обобщенном куммеровом многообразии.

Как уже было отмечено выше, любое абсолютно трианалитическое подмногообразие является гиперкэлеровым (возможно, после нормализации). Согласно классификационной теореме Богомолова-Бовиля всякое гиперкэлерово многообразие после перехода к конечному этальному накрытию распадается в произведение компактного тора с гиперкэлеровой структурой и нескольких неприводимых голоморфно-симплектических многообразий. Можно задаться вопросом о том, какого типа гиперкэлеровы многообразия могут быть абсолютно трианалитическими подмножествами в M . В примере Вербицкого и Каледина подмногообразие изоморфно схеме Гильберта точек на $K3$ -поверхности.

В совместной работе в Вербицким мы доказали, что если M — это одно из двух исключительных многообразий О'Грэйди, то в нем не может содержаться абсолютно трианалитического подмногообразия, нормализацией которого является тор. Кроме того, в случае 10-мерного многообразия О'Грэйди мы доказали, что трианалитические подмногообразия в нем (если они существуют) должны быть нового, неизвестного на данный момент типа.

Доказательство основано на том, что на первых гомологиях абсолютно трианалитического тора возникает некоторая структура, которую мы назвали k -симплектической. Эта структура определяется так. Пусть V — комплексное векторное пространство размерности $4m$. Подпространство $\Omega \subset \Lambda^2 V^*$ размерности k задает k -симплектическую структуру на V , если

- для любой ненулевой 2-формы $\omega \in \Omega$ либо $\dim(\ker \omega) = 0$, либо $\dim(\ker \omega) = 2m$;
- множество вырожденных 2-форм ω образует квадрику в $\mathbb{P}\Omega$.

Мы показали, что k -симплектические структуры существуют для любого k . При этом существование такой структуры накладывает ограничения на размерность V , что было использовано для доказательства отсутствия абсолютно трианалитических торов в многообразиях О'Грэйди.

2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

1. A. Soldatenkov, M. Verbitsky *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds*, arXiv:1409.1100

3. ДИССЕРТАЦИЯ

В июне 2014 года я защитил кандидатскую диссертацию на тему “Геометрия гиперкомплексных многообразий”, научный руководитель — М. Вербицкий.

4. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

1. Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and Enriques surfaces, Lille, March 24-28, 2014
2. A workshop on the Chow group of holomorphically symplectic manifolds, Moscow, May 19-23, 2014
3. Derived Categories, Motives and Zeta-functions, Edinburgh, June 9-11, 2014
4. Complex manifolds, dynamics and birational geometry, Moscow, November 10-14, 2014

5. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

Я являюсь стажером-исследователем Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений, НИУ-ВШЭ, Москва. С 1-го октября 2014 года я являюсь постдоком в институте Макса Планка в Бонне, Германия.

6. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

В весеннем семестре участвовал в проведении студенческих семинаров по курсу “Комплексная алгебраическая геометрия” в НИУ-ВШЭ. В июне 2014 я прочитал вводный курс из четырех лекций “Introduction to the geometry of holomorphic symplectic manifolds” в университете Эдинбурга.

7. КРАТКИЕ ИТОГИ ЗА ДВА ГОДА РАБОТЫ

Результаты, полученные в 2013–2014 годах опубликованы в двух работах:

1. A. Soldatenkov, M. Verbitsky *Holomorphic Lagrangian fibrations on hypercomplex manifolds*, Int. Math. Res. Notices (2013), doi: 10.1093/imrn/rnt218
2. A. Soldatenkov, M. Verbitsky *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties in hyperkahler manifolds*, arXiv:1409.1100

Результаты, полученные во второй работе описаны в разделе 1.

В первой работе рассматривался класс гиперкомплексных многообразий с НКТ-метрикой. Это условие на метрику слабее, чем условие гиперкэлеровости. А именно, используя обозначения из раздела 1, метрика g называется НКТ-метрикой, если $\partial\Omega_I = 0$, где $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$, а $\omega_J(X, Y) = g(JX, Y)$, $\omega_K(X, Y) = g(KX, Y)$ — стандартные 2-формы. Форма Ω_I невырождена в каждой точке и задает в касательных пространствах симплектическую структуру. Поэтому можно определить понятие лагранжева подмногообразия.

В первой работе рассматривались голоморфные лагранжевы расслоения, то есть голоморфные субмерсии $\pi: M \rightarrow B$, где B — некоторое комплексное многообразие и все слои отображения π лагранжевы. Было доказано, что если M — гиперкомплексное многообразие с НКТ-метрикой, у которого голономия связности Обаты содержится в $SL(n, \mathbb{H})$, а $\pi: M \rightarrow B$ — лагранжево расслоение, тогда база B является кэлеровым многообразием. Это обобщает аналогичную теорему для гиперкэлеровых многообразий. В работе также было показано, как с помощью этой теоремы строить примеры гиперкомплексных многообразий, не допускающих никакой НКТ-метрики.

В целом, результаты, полученные в этих двух работах соответствуют заявленному направлению исследований и относятся к изучению подмногообразий в гиперкомплексных многообразиях. Ожидаемые результаты о голоморфных лагранжевых расслоениях были получены в первой работе. Одним из возможных направлений исследования было также заявлено изучение специальных классов метрик на гиперкомплексных многообразиях и гиперкомплексного аналога гипотезы Калаби. В этом направлении мне не удалось получить существенных продвижений, так как техника применяемая при доказательстве гипотезы Калаби в кэлеровом случае оказалась неприменима в гиперкомплексной ситуации.

За два года я участвовал шести конференциях, несколько раз выступал с докладами на семинарах в НИУ-ВШЭ и университете Бонна, читал лекции в университете Эдинбурга, а также защитил кандидатскую диссертацию.