

Отчет
по программе фонда «Династия»
за 2015 год

Подольский Владимир

Результаты, полученные в 2015 году

Было продолжено исследование задачи поиска ответов на запросы к базам данных, снабженным логической теорией. Ранее исследовался стандартный подход к ответам на такие запросы, а именно преобразования запросов к такому виду, чтобы для ответа на запрос не приходилось обращаться к логической теории, а достаточно было данных, непосредственно представленных в базе. Для поиска ответа на такой преобразованный запрос применимы уже стандартные методы работы с обычными базами данных. Для таких преобразований в предыдущие годы исследовался рост длины запроса при таком преобразовании. В ряде случаев (для различных форм преобразованных запросов, для различных ограничений глубины логических теорий, для различных ограничений на граф, естественно задаваемый запросом) были получены нижние и верхние оценки длины таких преобразований. В этом году исследовался непосредственно вопрос об алгоритмической сложности задачи ответа на запрос. Входными данными в этой задаче являются база данных, логическая теория и запрос. Результатом работы алгоритма должен быть список всех элементов базы данных, подходящими под данный запрос. Алгоритмическая сложность этой задачи изучалась для тех же вариантов теорий и запросов, для которых велись предыдущие исследования. Из ранее полученных результатов уже вытекало, что для теорий без ограничений и для древовидных (а также и для произвольных конъюнктивных) запросов эта задача является NP-полной. В текущем году было показано, что для случая произвольных конъюнктивных запросов задача остается NP-полной если ограничить глубину теории константой, в том числе это верно и для теорий глубины 1. В случае же произвольных теорий и линейных запросов задача уже оказывается LOGCFL-полной. Известный пример полной задачи в этом классе – задача о принадлежности слова контекстно-свободной грамматике. Этот класс содержится в классе P полиномиально разрешимых задач, но содержит в себе, например, класс NL задач, разрешимых недетерминированными машинами на логарифмической памяти. В случае теорий ограниченной глубины (в том числе глубины 1), если ограничиться древовидными запросами, то задача также становится LOGCFL-полной. Если же ограничиться лишь линейными запросами, то задача еще упрощается и становится NL-полной. Эти результаты были опубликованы в виде тезисов в трудах конференции DL 2015 [1], а позже в более полной форме в трудах конференции LICS 2015 [2]. Журнальная версия работы готовится к публикации.

Также результаты исследований последних лет в этом направлении были рассказаны в докладе на конференции Computer Science in Russia 2015. В трудах конференции был опубликован обзор [6], в котором общий подход к этим результатам излагался со стороны сложности вычис-

лений.

Проводились исследования в области коммуникационной сложности. В стандартной постановке в этой области несколько участников вычисления хотят вычислить булеву функцию, но каждый из участников знает только часть переменных. Соответственно, для вычисления функции участникам требуется обмениваться информацией. Минимальное количество информации, которое достаточно передать для вычисления функции в худшем случае, и называется коммуникационной сложностью. Пожалуй, наибольший интерес с точки зрения приложений в этой области представляет модель “Число на лбу”. В этой модели с каждым из k игроков соотнесена часть входных битов из множества $\{0, 1\}^n$, при этом весь входной набор функции лежит в множестве $\{0, 1\}^{n \times k}$. Но при этом каждый игрок видит весь вход, кроме той части, которая соотнесена с ним. Удобно представлять, что у каждого игрока на лбу написан набор из $\{0, 1\}^n$, и игрок видит все наборы, кроме своего. В этой модели информация о входных битах, имеющаяся у игроков сильно перекрывается, что существенно затрудняет задачу доказательства нижних оценок коммуникационной сложности конкретных функций (а такие нижние оценки и составляют основную задачу в коммуникационной сложности). Тем не менее, для небольшого числа игроков сильные оценки известны. Самые простые функции, для которых удается доказать такие нижние оценки – это функция обобщенного скалярного произведения и функция “Дизъюнктивность”. В первой функции наборы, приписанные каждому игроку, интерпретируются как векторы и функцию можно вычислить перемножив все эти векторы по координатам, а затем сложив получившиеся значения по всем координатам по модулю два. В функции “Дизъюнктивность” наборы, приписанные каждому игроку, задают подмножества n -элементного множества, и функция равна единице, если не существует элемента, принадлежащего всем множествам. Оказывается, что такие функции трудны для вычисления коммуникационными протоколами (даже в вероятностном случае), но известные методы дают сильные оценки только если число игроков k не превышает $\log n$. Для большего числа игроков ни для каких явных функций не известны сильные нижние оценки. Для двух приведенных выше и вообще известно, что их коммуникационная сложность резко падает, когда число игроков переходит границу $\log n$. Однако точное значение коммуникационной сложности этих функций для числа игроков, превышающего k , известно не было. Ответ на этот вопрос как раз и был получен. Было доказано, что когда число игроков остается близким к $\log n$, то вероятностная коммуникационная сложность также имеет порядок $\log n$. С ростом числа игроков коммуникационная сложность постепенно убывает и становится равной константе при полиномиальном числе игроков. Кроме того, был построен пример функции, для которой коммуникационная сложность также равна $\log n$ при $k = \log n$ игроках, и сложность этой функции не убывает с ростом числа игроков. Эти результаты в настоящее время готовятся к публикации. Препринт планируется опубликовать в начале следующего года.

Опубликованные и поданные в печать работы

- [1] M. Bienvenu, S. Kikot, and V. V. Podolskii. Combined complexity of answering tree-like queries in OWL 2 QL. In *Proceedings of the 28th International Workshop on Description Logics, Athens, Greece, June 7-10, 2015.*, 2015.

- [2] M. Bienvenu, S. Kikot, and V. V. Podolskii. Tree-like queries in OWL 2 QL: succinctness and complexity results. In *30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2015, Kyoto, Japan, July 6-10, 2015*, pages 317–328, 2015.
- [3] D. Grigoriev and V. V. Podolskii. Complexity of tropical and min-plus linear prevarieties. *Computational Complexity*, 24(1):31–64, 2015.
- [4] D. Grigoriev and V. V. Podolskii. Tropical effective primary and dual Nullstellensätze. In *32nd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2015, March 4-7, 2015, Garching, Germany*, pages 379–391, 2015.
- [5] K. A. Hansen and V. V. Podolskii. Polynomial threshold functions and boolean threshold circuits. *Inf. Comput.*, 240:56–73, 2015.
- [6] V. V. Podolskii. Circuit complexity meets ontology-based data access. In *Computer Science - Theory and Applications - 10th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2015, Listvyanka, Russia, July 13-17, 2015, Proceedings*, pages 7–26, 2015.

Участие в конференциях и школах

1. Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Гархинг, Германия, 4-7 марта 2015, 1 доклад.
2. Complexity of Symbolic and Numerical Problems, Дагштуль, Германия, 7-12 июня 2015, приглашенный доклад.
3. The 10th International Computer Science Symposium in Russia, Иркутск, 12-17 июля 2015, приглашенный доклад.

Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

1. ВШЭ, факультет компьютерных наук. Курс “Дискретная математика”, лекции и семинары. Весенний и осенний семестры.
2. ВШЭ, факультет компьютерных наук. Научно-исследовательский семинар для студентов “Теоретическая информатика, вычислительная логика и искусственный интеллект”, осень 2015 года.
3. ВШЭ, факультет компьютерных наук. Руководство одной курсовой работой весной 2015 года и тремя курсовыми работами осенью 2015 года. Руководство аспирантом, осень 2015 года.
4. Программа Math in Moscow. Курс “Computability and Complexity”, весь 2015 год.
5. Программа Math in Moscow. Руководство научной работой двух студентов, осень 2015 года.
6. Мехмат МГУ. Просеминар по математической логике и информатике для младшекурсников, весь 2015 год.
7. Мехмат МГУ. Руководство курсовой работой одного студента, осень 2015 года.

Краткий итог трех лет

Полученные за три года результаты сопоставимы с тем, что планировалось сделать в заявке. В целом можно сказать, что запланированные цели были достигнуты.

Запланированные результаты по пороговым функциям над переменными $\{1, 2\}$ были получены еще в первый год работы. Журнальная статья с этими результатами вышла в этом году [5].

Результаты в области мин-плюс алгебры, а именно аналог теоремы Гильберта о нулях, отняли заметно больше времени, чем изначально планировалось. Связанно это с неожиданно возникшими дополнительными трудностями в случае мин-плюс полукольца с бесконечностью. Эти трудности оказались неизбежными: было установлено, что в эффективной версии теоремы оценка степени возникающих многочленов для случая полукольца с бесконечностью принципиально другая, нежели в случае полукольца без бесконечности. Это различие в какой-то мере сходно с аналогичным различием между аффинным и проективным случаями для классической теоремы Гильберта о нулях. Таким образом, в результате возникших трудностей (и их преодоления) итоговая картина получилась более интересной, чем ожидалось изначально. Подробнее об этом написано в отчете прошлого года.

В области исследования запросов к базам данных, снабженным логическими теориями, в заявке планы были сформулированы расплывчато, поскольку на момент написания заявки не было ясно, в какую сторону будут развиваться исследования. По мере работы дальнейшие направления стали проясняться, и в этой области были получены существенные продвижения. Для их получения потребовалось значительно более подробное изучение связи этой области с областью сложности вычислений.

В области коммуникационной сложности работа шла не так быстро, как хотелось бы. В какой-то мере на эту работу не хватило времени. В итоге заявленные результаты были получены, но времени на их подготовку к публикации немного не хватило. Эту работу планируется закончить в ближайшее время.

В заключение своего последнего отчета исполнитель хотел бы выразить глубокую благодарность за поддержку фонду “Династия” и всем к нему причастным. Отдельную благодарность хочется высказать фонду за идеальную организацию отчетности. Писать эти отчеты было легко и приятно.