Отчёт М.В. Игнатьева для Фонда «Династия»

Основные результаты, полученные в 2015 г.

1. Расстановки ладей и коприсоединённые орбиты. Пусть G — комплексная редуктивная группа, T — максимальный тор в ней, B — борелевская подгруппа, содержащая тор T, U — унипотентный радикал группы B, Φ — система корней группы G относительно тора T, Φ^+ — множество положительных корней относительно группы B. Группы B и U действуют на алгебре Ли $\mathfrak{n}$ группы U присоединённым образом; двойственное действие этих групп на сопряжённом пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым.* Орбиты коприсоединённого действия играют ключевую роль в теории представлений групп B и U согласно методу орбит, открытому А.А. Кирилловым. Полная классификация коприсоединённых орбит в общем случае является дикой задачей.

Расстановкой ладей называется подмножество $D \subset \Phi^+$, состоящее из корней с попарно неположительными скалярными произведениями. Выберем в $\mathfrak{n}$ базис, состоящий из корневых векторов e_α, $\alpha \in \Phi^+$; пусть $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — двойственный базис пространства $\mathfrak{n}^*$. Орбитой, *ассоциированной* с расстановкой D, мы называем B-орбиту Ω_D элемента

$$f_D = \sum_{\beta \in D} e_\beta^*.$$

Практически все орбиты, сколь-нибудь полно изученные к настоящему времени, относятся к орбитам, ассоциированным с расстановками ладей.

В прошлом году мы с А.С. Васюхиным начали изучение частичного порядка на множестве расстановок ладей в A_{n-1}^+, индуцированного примыканиями B-орбит. Отождествим A_{n-1}^+ с подмножеством $\mathbb{R}^n$ вида $\{\epsilon_i - \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Пусть $D = \{\epsilon_{i_1} - \epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{i_t} - \epsilon_{j_t}\}$, $1 < i_1 < \ldots < i_t$. Обозначим также через w_D подстановку в S_n, равную произведению транспозиций $(i_1, j_1) \ldots (i_t, j_t)$. Будем писать $D \preceq D'$, если для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется условие $D[i,j] \leqslant D'[i,j]$, где

$$D[i,j] = \#\{\epsilon_a - \epsilon_b \in D \mid a \leqslant i,\ b \geqslant j\}.$$

Мы показали, что $D \preceq D'$ является необходимым условием для того, чтобы орбита Ω_D лежала в замыкании орбиты $\Omega_{D'}$ (в 2012 г. я доказал, что для ортогональных подмножеств эти условия эквивалентны, более того, оба они эквивалентны тому, что $w_D \leqslant w_{D'}$ в смысле порядка Брюа.)

В этом году мы с Д. Дориным получили гипотетическое описание «правильного» порядка на множестве расстановок ладей, кодирующего примыкания B-орбит. А именно, мы предполагаем, что Ω_D лежит в замыкании $\Omega_{D'}$ тогда и только тогда, когда $D \preceq D'$ и для каждой пары ладей $\epsilon_a - \epsilon_b$, $\epsilon_b - \epsilon_c \in D$ выполняется хотя бы одно из двух условий:

(i) $(D \setminus \{\epsilon_a - \epsilon_b,\ \epsilon_b - \epsilon_c\}) \cup \{\epsilon_a - \epsilon_c\} \preceq D'$;

(ii) существуют $i < a$ и $j > c$ такие, что $\epsilon_i - \epsilon_b,\ \epsilon_b - \epsilon_j \in D$.

Более того, выполнение этих условий равносильно тому, что $w_D \leqslant w_{D'}$ в смысле порядка Брюа. Мы проверили, что наша гипотеза верна для некоторого класса расстановок ладей. А именно, *цепью* называется такой набор упорядоченный ладей в D, в котором любые две соседние ладьи имеют вид $\epsilon_a - \epsilon_b$, $\epsilon_b - \epsilon_c$ и который нельзя расширить с сохранением этого условия. Так вот, мы показали, что наша гипотеза верна, если в D существует не более одной цепи. Сейчас мы работаем над доказательством гипотезы в общем случае.

Также мы с И.В. Барышниковым в 2014 г. доказали, что условие $D \preceq D'$ эквивалентно тому, что $\kappa_D \leqslant \kappa_{D'}$ в смысле порядка Брюа, где κ_D — *инволюция Керова* в S_{2n-2}, равная, по определению, произведению транспозиций $(2i_1-2, 2j_1-1)\ldots(2i_t-2, 2j_t-1)$. Используя этот факт, мы проверили, что частично упорядоченное множество расстановок ладей является градуированным, то есть все максимальные цепи в нём имеют одну и ту же длину, и явно построили функцию ранга. (Ранее аналогичные результаты были получены для ортогональных подмножеств во всех классических группах Ф. Инчитти.) В этом году нам удалось перенести результаты о градуированности и функции ранга на случай расстановок ладей в системе корней C_n. Инволюция Керова определяется в этом случае с помощью вложения группы Вейля $W(C_n)$ в симметрическую группу S_{2n}.

2. Примитивные идеалы и коприсоединённые орбиты. Для алгебр Ли есть версия метода орбит, разработанная Ж. Диксмье. Она устанавливает биекцию между множеством коприсоединённых орбит и множеством примитивных идеалов (то есть аннуляторов простых модулей) универсальной обёртывающей алгебры.

Пусть, как и выше, $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли группы U, $U(\mathfrak{n})$ — её универсальная обёртывающая алгебра. Выберем произвольную линейную форму $f \in \mathfrak{n}^*$ и любую её поляризацию $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{n}$ (это подалгебра, одновременно являющаяся максимальным f-изотропным подпространством; последнее условие означает, что $f([x,y]) = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{p}$). Пусть W — одномерное представление алгебры $\mathfrak{p}$ вида $x \mapsto f(x)$, $V = U(\mathfrak{n}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} W$ — индуцированное представление и $J = \operatorname{Ann} V \subset U(\mathfrak{n})$ — его аннулятор. Оказывается, что представление V неприводимо (а значит, идеал J примитивен), $J = J(f)$ не зависит от выбора $\mathfrak{p}$, $J(f) = J(f')$ тогда и только тогда, когда f и f лежат на одной U-орбите, и отображение $f \mapsto J(f)$ индуцирует биекцию между $\mathfrak{n}^*/U$ и множеством примитивных идеалов в $U(\mathfrak{n})$, называемую *отображением Диксмье*.

В прошлом году мы с И. Пенковым доказали, что для A_{n-1} и C_n идеал $J(f)$ центрально порождён тогда и только тогда, когда f — *форма Костанта*. По определению, это форма вида $f = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \xi_\beta e_\beta^*$, где $\mathcal{B}$ — *каскад Костанта*, то есть ортогональная расстановка ладей, равная, по определению

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \{\epsilon_1 - \epsilon_n,\ \epsilon_2 - \epsilon_{n-1},\ \ldots,\ \epsilon_{[n/2]} - \epsilon_{n-[n/2]+1}\}, & \text{для } A_{n-1},\\ \{2\epsilon_1,\ 2\epsilon_2,\ \ldots, 2\epsilon_n\}, & \text{для } C_n. \end{cases}$$

Здесь мы отождествляем C_n^+ с подмножеством $\mathbb{R}^n$ стандартным образом, а ξ_β — произвольные константы, причём все они, кроме, быть может, последней, отличны от нуля.

Более того, мы предъявили набор образующих произвольного центрально порождённого примитивного идеала. А именно, пусть V_i — i-е фундаментальное представление группы G, v_i и λ_i — старшие векторы в V_i и V_i^* соответственно, ϖ_i и ϖ_i^* — их веса. Обозначим через $\mathfrak{n}_-$ алгебру Ли унипотентного радикала борелевской подгруппы в G, противоположной группе B. Правило

$$\mathfrak{n}_- \ni x \mapsto \text{коэффициент при младшей степени } t \text{ в ряде } \lambda_i(\exp(tx)\cdot v_i)$$

определяет некоторый многочлен из $\mathbb{C}[(\mathfrak{n}_-)^*]$. Он или неприводим, или является квадратом неприводимого; во втором случае извлечём корень. Теперь с помощью формы Киллинга отправим его в симметрическую алгебру $S(\mathfrak{n})$, а затем, с помощью отображения симметризации, — в универсальную обёртывающую алгебру $U(\mathfrak{n})$. Обозначим полученный элемент обёртывающей алгебры через Δ_i.

Из результатов А. Джозефа, Б. Костанта, Р. Липсмана, Дж. Вольфа и А.Н. Панова вытекает, что Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant |\mathcal{B}|$, — образующие центра $U(\mathfrak{n})$. Теперь для любого набора констант

$$c = (c_1, \ldots, c_{|\mathcal{B}|})$$

через J_c обозначим идеал в $U(\mathfrak{n})$, порождённый всеми $\Delta_i - c_i$. Мы показали, что он будет примитивным тогда и только тогда, когда все c_i, кроме, быть может, последней, отличны от нуля (и это все примитивные центрально порождённые идеалы). Доказательство основано на том, что примитивность идеала равносильна тому, что фактор по нему — алгебра Вейля. Нам удалось построить систему образующих в $U(\mathfrak{n})/J_c$, удовлетворяющих определяющим соотношениям алгебры Вейля. Их конструкция аналогична конструкции Δ_i, только нужно вместо векторов старшего веса в обоих представлениях V_i и V_i^* брать в одном из них вектор веса $\varpi_i - \alpha$ или $\varpi_i^* - \alpha$ соответственно, где $\alpha \in \Phi^+ \setminus \mathcal{B}$.

Каскад Костанта, однако, можно определить для любой системы корней: мы должны выбрать максимальный корень в каждой неприводимой компоненте Φ; корни, ортогональные ко всем выбранным корням, образуют систему корней, в каждой неприводимой компоненте которой вновь выбирается максимальный корень, и т.д. Для B_n и D_n не удаётся доказать примитивность идеала J_c описанным выше способом. Но зато этот алгоритм работает, как мы показали с А.А. Шевченко в этом году, для исключительных систем корней типов G_2 и F_4. На эти системы корней формулировки результатов переносятся дословно; в частности, центрально порождённые примитивные идеалы в этих случаях — это в точности идеалы вида $J(f)$, где f— форма Костанта. Сейчас мы работаем над переносом этих результатов на случай исключительных систем корней типа E.

3. Геометрия многообразий флагов. Предположим, что G полупроста, а P — произвольная параболическая подгруппа в G, содержащая B. Обозначим через $\mathcal{F}\ell = G/P$ многообразие флагов. Пусть G_0 — вещественная форма группы G (к примеру, если $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, то в качестве G_0 можно выбрать $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$). Согласно классическим результатам Дж. Вольфа, число G_0-орбит на $\mathcal{F}$ всегда конечно (следовательно, всегда есть открытая орбита). Более того, объединение открытых орбит плотно в $\mathcal{F}\ell$, и существует единственная замкнутая орбита Ω, причём

$$\dim_{\mathbb{R}} \Omega \geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}\ell.$$

В 2015 г. мы с И. Пенковым и Дж. Вольфом работали над построением теории орбит вещественных форм бесконечномерных классических ind-групп на их бесконечномерных ind-многообразиях обобщённых флагов. Пусть V — счётномерное пространство с базисом E. Группа $\mathrm{GL}(V, E)$ состоит из всех автоморфизмов V, которые оставляют на месте все векторы из E, кроме конечного числа. Через

$$G_\infty = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$$

обозначается её подгруппа, состоящая из всех автоморфизмов с определителем 1 (ясно, что у линейных операторов из $\mathrm{GL}(V, E)$ корректно определён определитель). Если на V дополнительно задана невырожденная симметрическая или кососимметрическая билинейная форма, то подгруппа в $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, её сохраняющая, обозначается $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ соответственно и тоже относится к классическим ind-группам, но мы пока рассматривали только случай ind-группы $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$.

Группа G_∞ является *ind-многообразием*: её можно исчерпать конечномерными подмногообразиями $G_n = \mathrm{SL}_n(V_n)$, где V_n — линейная оболочка E_n, а

$$E = \bigcup E_n$$

— какое-то исчерпание базиса E конечными подмножествами. Поскольку каждое G_n — подгруппа, G является *ind-группой*. Все операторы из G_∞, диагональные в базисе E, образуют *разложимую картановскую* подгруппу H_∞; *разложимые борелевские* B_∞ и *параболические* подгруппы P_∞ определяются как ind-подгруппы в G_∞, содержащие H_∞, пересечение которых с каждой G_n является борелевской или параболической подгруппой в G_n соответственно. Фактор $\mathcal{F}\ell = G/P$ естественно наделяется структурой ind-многообразия и отождествляется с множеством некоторых цепочек подпространств в V, которые И. Пенков и И. Димитров назвали *обобщёнными флагами*.

По определению, *вещественная форма* G_0 группы G — это такая её вещественная ind-подгруппа, что каждое $G_0 \cap G_n$ будет вещественной формой группы G_n. Согласно результатам А. Баранова, полная классификация вещественных форм выглядит так: это либо $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{R})$ (множество операторов из G, коммутирующих с заданной вещественной структурой на V, то есть антилинейной инволюцией $\tau\colon V \to V$), либо $\mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$ (множество операторов из G, сохраняющих данную невырожденную эрмитову форму на V), либо $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{H})$ (множество операторов из G, коммутирующих с заданной кватернионной структурой на V, то есть антилинейным автоморфизмом $J\colon V \to V$, в квадрате равным -1). В каждом случае предполагается, что ограничение дополнительной структуры на V на каждое подпространство V_n является аналогичной дополнительной структурой на V_n. Индексы во втором случае зависят от того, к чему стремятся положительные и отрицательные индексы инерции ограничения формы на подпространства V_n.

Ind-многообразие $\mathcal{F}\ell$ обладает исчерпанием конечномерными подмногообразиями $\mathcal{F}\ell_n$, состоящими из флагов фиксированного типа в V_n, на которых действует подгруппа G_n. Мы доказали, что пересечение произвольной G_0-орбиты Ω на произвольном ind-многообразии $\mathcal{F}\ell$ с каждым $\mathcal{F}\ell_n$ если не пусто, то состоит ровно из одной $(G_0 \cap G_n)$-орбиты. Это задаёт структуру бесконечномерного вещественного ind-многообразия на Ω.

Мы также нашли критерий, которому должно удовлетворять $\mathcal{F}\ell$, чтобы G_0 имела на нём конечное число орбит. А именно, для $G_0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ число орбит конечно всегда, а для остальных вещественных форм оно будет конечным тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}\ell$ состоит из конечных цепочек подпространств, каждое из которых имеет конечную размерность или коразмерность в V. В этом случае мы установили, что граф примыканий G_0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ совпадает с графом примыканий $(G_0 \cap G_n)$-орбит на $\mathcal{F}\ell_n$ для достаточно большого n. Мы также определили необходимые и достаточные условия для существования замкнутой орбиты на $\mathcal{F}\ell$ и исследовали вопрос о конечности числа открытых орбит. Сейчас мы работаем над переносом этих результатов на другие классические ind-группы.

Итоги. В моей заявке содержалось три группы задач. Первая из них относилась к изучению в случае $\Phi = A_{n-1}^+$ коприсоединённых B-орбит, в частности, исследованию порядка $\preceq$ на множестве расстановок ладей, связанного с примыканиями орбит, и нахождения для каждой расстановки ближайшей к ней в смысле этого порядка. Эти задачи удалось полностью решить (совместно с А.С. Васюхиным, И.В. Барышниковым, Д. Дориным); попутно также мы установили некоторые дополнительные комбинаторные свойства (градуированность множества расстановок ладей) и получили гипотетическое описание «правильного» порядка, индуцированного примыканиями.

Также удалось доказать, что расстановки ладей играют важную роль для бесконечномерного случая: с помощью форм Костанта, ассоциированных с некоторыми бесконечными ортогональными расстановками, мы с И. Пенковым описали центрально порождённые примитивные идеалы в $U(\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ — нильрадикал борелевской подагебры бесконечномерной классической алгебры Ли типа A или C. Впрочем, аналогичное описание было получено нами и в конечномерной ситуации для этих типов и остаётся верным, как показали мы с А.А Шевченко, и для типов F_4 и G_2.

Вторая группа задач относилась к изучению многообразий флагов группы G и их подмногообразий Шуберта. Главной задачей было доказать, что если w_1, w_2 — разные инволюции в группе Вейля, то касательные конусы в точке eB к подмногообразиям Шуберта X_{w_1}, X_{w_2} в G/B не могут совпасть. К началу работы это было доказано мной с Д.Ю. Елисеевым для A_{n-1}, F_4, G_2. Эту задачу удалось решить совместно с А.А. Шевченко и М.А. Бочкарёвым для B_n и C_n и совместно с А.А. Шевченко — для D_n и определённого класса инволюций; для типа E вопрос остаётся открытым.

Описать в явном виде касательные конусы не удалось, а одна из гипотез о сопряжённости инволюций, для которых касательные конусы совпадают, оказалась просто не верна (как показал М.А. Бочкарёв). С другой стороны, получилось доказать ряд результатов о геометрии флаговых многообразий в бесконечномерной ситуации, а именно, изучить структуру орбит вещественных форм $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ на её флаговых ind-многообразиях.

Третья группа задач была связана с теорией представлений. Если в качестве основного поля брать не $\mathbb{C}$, а $\mathbb{F}_q$, то, согласно методу орбит А.А. Кириллова, неприводимые комплексные представления группы U соответствуют коприсоединённым U-орбитам на $\mathfrak{n}^*$. Для конкретной орбиты всегда есть две задачи: найти поляризацию для какой-то формы на орбите (она участвует в явной конструкции представления) и определить размерность орбиты (она вдвое больше размерности представления), а также получить явную формулу для характера этого представления. Обе задачи должны были быть решены для орбит, ассоциированных с расстановками ладей в A_{n-1}^+. Первая задача была полностью решена, а на вторую мне не хватило времени, но я надеюсь вернуться к ней в следующем году.

Научные публикации в 2015 г.

1. М.В. Игнатьев, А.А. Шевченко. О касательных конусах к многообразиям Шуберта типа D_n. Алгебра и анализ **27** (2015), no. 4, 28–49, см. также arXiv: `math.AG/1410.4025`.

2. M.V. Ignatyev, I. Penkov. Infinite Kostant cascades and centrally generated ideals of $U(\mathfrak{n})$ in types A_∞ and C_∞. J. Algebra **447** (2016), 109–134, см. также arXiv: `math.RT/1502.05486`.

3. M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, принята к печати, см. также arXiv: `math.AG/1310.3166`.

4. M.V. Ignatyev, I. Penkov, J.A. Wolf. Real group orbits on complex flag ind-varieties of $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Oberwolfach preprint, in preparation.

5. М.В. Игнатьев. Каскады Костанта, центры и центрально порождённые идеалы $U(\mathfrak{n})$. Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Тезисы докладов. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2015, с. 25–27.

Школы, конференции и семинары

1. Участие в работе весенней школы «Characters of representations and modular forms», Max Planck Institute for Mathematics, Бонн, Германия, март 2015 г.

2. Научный семинар кафедры алгебры и геометрии (рук. проф. А.Н. Панов). Самарский государственный университет, Самара, май 2015. Название доклада: «Модулярные формы и числа Фробениуса».

3. Пятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Самарский государственный университет, Самара, июнь 2015 г. Название доклада: «Каскады Костанта, центры и центрально порождённые идеалы $U(\mathfrak{n})$».

4. Семинар «Algebra, Lie Theory, and Geometry» (рук. проф. И. Пенков). Jacobs University, Бремен, октябрь 2015 г. Название доклада: «Real ind-group orbits on complex generalized flag varieties».

5. Научный семинар кафедры алгебры и геометрии (рук. проф. А.Н. Панов). Самарский государственный университет, Самара, декабрь 2015. Название доклада: «Ind-многообразия обобщённых флагов».

Работа в международных центрах и научных группах

Oberwolfach Leibniz Fellow, Oberwolfach Research Institute for Mathematics, Обервольфах, Германия, сентябрь–октябрь 2015 г., изучение геометрии орбит вещественных форм бесконечномерных классических ind-групп на их бесконечномерных ind-многообразиях обобщённых флагов.

Педагогическая деятельность

1. В весеннем семестре 2014/2015 учебного года я прочёл спецкурсы «Представления групп Ли и теория специальных функций» и «Алгоритмические и комбинаторные аспекты теории представлений» студентам 5 курса механико-математического факультета Самарского государственного университета.

2. В июле 2015 г. на VII Студенческой летней математической школе, проводившейся СамГУ для студентов и аспирантов механико-математического и физического факультетов, я прочёл мини-курс «Абелевы категории».

3. В 2015 г. я руководил дипломной работой И.В. Барышникова, студента механико-математического факультета СамГУ. Работа посвящена доказательству градуированности множества расстановок ладей в A_n и C_n с порядком, индуцированным примыканиями коприсоединённых B-орбит.

4. В течение всего года я был руководителем учебных семинаров для студентов СамГУ «Введение в теорию гомологий» и «Введение в теорию представлений».

5. Также я подготовил учебное пособие «Метод орбит для алгебр Ли», в котором излагается конструкция отображения Диксмье, описывающего множество примитивных идеалов в универсальной обёртывающей алгебре конечномерной нильпотентной алгебр Ли в терминах коприсоединённых орбит, и первые результаты о переносе этой теории на бесконечномерный случай. Пособие принято к печати издательством «Самарский университет», публикация планируется в первой половине 2016 г.