Отчет по гранту фонда «Династия» за 2014 год

Д.В. Горбачев
Тульский государственный университет

1. Результаты, полученные в 2014 году

Основное внимание в проекте уделяется задаче оценки плотности Δ_n упаковки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ одинаковыми шарами средствами гармонического анализа из решения экстремальных задач типа Дельсарта. Также рассматриваются приложения применяемой техники решения экстремальных задач в метрической геометрии, гармоническом анализе и теории приближений функций. Приведем основные результаты за отчетный период.

1. Доказана оценка оптимального аргумента в точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ для случая обобщенного модуля непрерывности, частным случаем которого является классический модуль непрерывности [1].

Пусть $E_\nu(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа $\nu > 0$, $\omega_M(\delta, f)_2 = \sup_{|t|\le\delta} \|\Delta_t^M f\|_2$, $\delta > 0$, — модуль непрерывности f, определяемый обобщенным разностным оператором $\Delta_t^M f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k f(x+kt)$, где $M = \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям $0 < \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| < \infty$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k = 0$. Классическому оператору $\Delta_t^r f$, $r \in \mathbb{N}$, отвечает последовательность $M_r = \big\{(-1)^{r-k}\binom{r}{k} \colon k \in \mathbb{Z}\big\}$.

Положим $s_l = \sum\limits_{k=1}^{l} \varphi_l$, где $\varphi_l = -2\operatorname{Re}\widehat{\varphi}_l$, $\widehat{\varphi}_l = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \overline{\mu_{k+l}}$, $l \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Если $s_l \ge 0$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 1$, и $\nu > 0$ справедливо точное неравенство Джексона–Стечкина*

$$E_\nu(f)_2 \le \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2\Big)^{-1/2} \omega_M\Big(\frac{2q_{n/2}}{\nu}, f\Big)_2,$$

где $q_{n/2}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{n/2}(u)$.

Для последовательности M_r имеем $\varphi_l = 2(-1)^{l-1}\binom{2r}{r-l}$, $l \in \mathbb{N}$, и условия теоремы выполнено.

Аналогичные утверждения справедливы для тора $\mathbb{T}^n$. Полученные результаты согласуются с классическими одномерными теоремами Н.И. Черных (1967) и уточняют некоторые многомерные результаты С.Н. Васильева (2009, 2010), А.И. Козко и А.В. Рождественского (2004).

2. Доказано точное неравенство Джексона [2] с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с гиперболическим весом

$$\Delta(t) = 2^{2\rho}|\operatorname{sh} t|^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \ge \beta \ge -1/2, \quad \alpha > -1/2, \quad \rho = \alpha+\beta+1.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, $d\mu(t) = \Delta(t)\,dt$, $E_\sigma(f,\mathbb{R})_{2,\mu}$ — величина наилучшего приближения f порядка $\sigma > 0$ классом функций $g \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, $\operatorname{supp} Fg \subset [-\sigma, \sigma]$, где F — интегральное преобразование Фурье–Опдама–Чередника, $\omega(\tau, f, \mathbb{R})_{2,\mu}$ — модуль непрерывности функции f, $D = D(\sigma, \tau, \mathbb{R})_{2,\mu}$ — наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_\sigma(f,\mathbb{R})_{2,\mu} \le D\omega(\tau, f, \mathbb{R})_{2,\mu}.$$

Для всех σ, τ справедлива нижняя оценка $D(\sigma,\tau,\mathbb{R})_{2,\mu} \ge 2^{-1/2}$. Поэтому величина

$$\tau_\mu(\sigma, \mathbb{R}) = \inf\{\tau > 0\colon D(\sigma,\tau,\mathbb{R})_{2,\mu} = 2^{-1/2}\}$$

называется оптимальным аргументом в точном неравенстве Джексона. Задача его вычисления связана с экстремальной задачей Логана о наименьшей области неположительности положительно определенной функции с компактных носителем преобразования Фурье–Якоби и неотрицательным средним значением по спектральной мере Якоби.

Пусть τ_σ — наименьший положительный нуль функции Якоби $\varphi_\sigma^{(\alpha,\beta)}(t)$.

Теорема 2. *Если $\alpha \ge \beta \ge -1/2$, $\alpha > -1/2$, $\sigma > 0$, то для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ справедливо точное неравенство Джексона*

$$E_\sigma(f,\mathbb{R})_{2,\mu} \le 2^{-1/2}\omega(2\tau_\sigma, f, \mathbb{R})_{2,\mu},$$

причем

$$\tau_\mu(\sigma, \mathbb{R}) = 2\tau_\sigma.$$

Для доказательства теоремы применяются квадратурные формулы Гаусса по нулям функций Якоби $\varphi_\sigma^{(\alpha,\beta)}(t)$, точные для целых функций экспоненциального типа.

3. Решена экстремальная задача Бомана для неотрицательных функций с компактным носителем преобразования Фурье–Ганкеля [3].

Пусть $\alpha \ge -1/2$, $\tau > 0$,

$$\mathrm{B}_{0\alpha}(\tau) = \inf\,\omega_\alpha \int_0^\infty t^2 f_0(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt, \quad f_0 \in \mathcal{B}_{0\alpha}(\tau),$$

где $\mathcal{B}_{0\alpha}(\tau)$ — класс четных неотрицательных функций $f_0 \in C(\mathbb{R})$, $t^2 f_0 \in L^1_{t^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)$, таких что $\operatorname{supp} \widetilde{f}_0 \subset [0,\tau]$ и $\widetilde{f}_0(0) = 1$, $\widetilde{f}_0(s) = \omega_\alpha \int_0^\infty f_0(t) j_\alpha(st)\,t^{2\alpha+1}\,dt$ — преобразование Фурье–Ганкеля, $\omega_\alpha = 2\pi^{\alpha+1}\Gamma^{-1}(\alpha+1)$. Функции f_0 можно отождествить с целыми функциями экспоненциального типа $\le \tau$.

Теорема 3. *Для $\alpha \ge -1/2$*

$$\mathrm{B}_{0\alpha}(\tau) = -D_\alpha \widetilde{f}_{0\alpha}(0) = \Bigl(\frac{q_\alpha}{\pi\tau}\Bigr)^2, \quad D_\alpha = \frac{1}{t^{2\alpha+1}}\,\frac{d}{dt}\,t^{2\alpha+1}\,\frac{d}{dt},$$

где единственная экстремальная функция

$$f_{0\alpha}(t) = \frac{2^{-4\alpha-2}\tau^{2\alpha+2}}{\pi^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)q_\alpha^2}\Bigl(\frac{j_\alpha(\tau t/2)}{1 - (\tau t/(2q_\alpha))^2}\Bigr)^2 \in \mathcal{B}_{0\alpha}(\tau).$$

Для доказательства этой теоремы применяются квадратурные формулы Бесселя на полуоси со степенным весом, точные для целых функций экспоненциального типа.

При полуцелом $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, получено новое доказательство n-мерного результата W. Ehm, T. Gneiting и D. Richards (2004) по нахождению минимума величины

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\,dx = -\Delta \widehat{f}(0),$$

на классе неотрицательных целых функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $|x|^2 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, имеющих экспоненциальный сферический тип $\le \tau$. Доказательство этого результата существенно использовало многомерные рассуждения. В одномерном случае задача была поставлена и решена H. Bohman (1960).

4. Доказано неравенство [4]

$$N(s) \geq \frac{(2/r(p))^2}{4\pi}\, s^2(1+O(s^{-1/2})), \quad s\to\infty,$$

где $N(s)$ — минимальное число точек (мощность) s-дизайна на евклидовой сфере $\mathbb{S}^2$, функция p принадлежит классу положительно определенных радиальных полиномов вида $p(x)=\sum_{k=0}^{m} p_k L_k(2\pi|x|^2)e^{-\pi|x|^2}$ (L_k — многочлены Лаггера), для которых $p(x)\leq 0$ при $|x|\geq r=r(p)$, $p(0)=\widehat{p}(0)=1$.

Для доказательства используется предельная связь задач Дельсарта оценки мощности s-дизайнов на сфере $\mathbb{S}^2$ и оценки плотности упаковки пространства $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4. *Имеем*

$$c=\liminf_{s\to\infty} s^{-2}N(s) > 0.275.$$

Теорема улучшает оценки $c\geq 0.25$ и $c>0.272$, вытекающие из границ Дельсарта–Геталса–Зейделя (1977) и Юдина (1997) соответственно. В оценке сверху справедлив неконструктивный результат А. Бондаренко, Д. Радченко и М. Вязовской (2013):

$$C=\limsup_{s\to\infty} s^{-2}N(s).$$

Имеется гипотеза R.H. Hardin и N.J.A. Sloane, что $C\leq 1/2$.

В качестве следствия теоремы улучшены нижние асимптотические границы мощности взвешенных дизайнов в евклидовом шаре B^2 с чебышевским весом $(1-|x|^2)^{-1/2}$, полученные Yuan Xu (2003):

$$N_s \geq 0.125s^2(1+O(s^{-1})), \quad N_s > 0.136s^2(1+O(s^{-1})).$$

В новом случае

$$N_s > 0.144s^2(1+O(s^{-1/2})).$$

5. Доказаны квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа [5]. Они обобщают квадратурные формулы по нулям функций Бесселя, впервые построенные C. Frappier и P. Oliver (1993). Квадратуры Бесселя отвечают интегральному преобразованию Фурье–Ганкеля. Даны другие примеры, связанные с интегральным преобразованием Якоби, рядом Фурье по ортогональным многочленам Якоби и общей задачей Штурма–Лиувилля с регулярным весом.

Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля применяются для решения экстремальных задач, связанных с гармоническим анализом на локально компактных (евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гиперболоиды $\mathbb{H}^n$) и компактных (тор $\mathbb{T}^n$, сфера $\mathbb{S}^n$, проективные пространства) римановых многообразиях, где зональные сферические функции являются решениями задач Штурма–Лиувилля. В частности, квадратурные формулы Бесселя применяются в задачах для $\mathbb{R}^n$.

6. Изучены родственные многомерные экстремальные задачи Логана и Бомана для функций с компактным носителем преобразования Фурье (целых функций экспоненциального типа) [6]. В задаче Логана требуется минимизировать радиус шара по норме Минковского, вне которого функция с неотрицательным средним значениям может быть неположительной. В задача Бомана минимизируется второй момент неотрицательной функции, в вероятностном смысле являющейся функцией плотности распределения. Оценки снизу опираются на применение формул суммирования Пуассона по точкам невырожденных решеток $L\subset\mathbb{R}^n$, результат записывается через радиус покрытия L по Минковского $\|x\|_U$. Оценки сверху используют функции Юдина и записываются через первое собственное значение оператора Лапласа в шаре по норме Минковского $\|x\|_V$.

Задачи Логана и Бомана имеют приложения в метрической геометрии (оценки параметров n-мерных решеток), теории приближений (точные неравенства Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$) и пространственной статистике (минимум дисперсии на классе характеристических в вероятностном смысле функций на $\mathbb{R}^n$).

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. *Горбачев Д.В.* Оценка оптимального аргумента в точном многомерном L_2-неравенстве Джексона–Стечкина // Труды института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 83–91.
2. *Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.* Optimal argument in the sharp Jackson inequality in the space L_2 with hyperbolic weight // Math. Notes. 2014, V. 96, no. 6. P. 904–913.
3. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
4. *Горбачев Д.В.* Нижние асимптотические оценки мощности дизайнов на сфере S^2 и шаре B^2 // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 11–25.
5. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. В печати.
6. *Gorbachev D.V.* Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems // Springer Basel (Birkhäuser) series. 2015. Подано в печать.

3. Участие в конференциях и школах

1–10 августа 2014, Летняя научная Школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций и теории аппроксимаций и их приложениям, Ильменский государственный заповедник, г. Миасс Челябинской области, Институт математики и механики Уральского отделения РАН. Тема доклада «Квадратурные формулы на полуоси», лекция «ℓ_1-Оптимизация».

15–19 сентября 2014, XV Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тема доклада «Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа» (совм. с В.И. Ивановым).

19 декабря 2013 г. Семинар «Экстремальные задачи для положительно определенных функций», Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург (рук. В.И. Бердышев, В.В. Арестов). Тема доклада «Новая асимптотическая нижняя оценка мощности взвешенных сферических дизайнов».

Тезисы докладов и материалы конференций:

1. *Горбачев Д.В.* Оценка оптимального аргумента в точном $L_2(\mathbb{R}^n)$-неравенстве Джексона–Стечкина // Тезисы докл. Межд. научн. семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», 24–28 апреля 2011. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. С. 52–53.
2. *Де Карли Л., Горбачев Д.В., Тихонов С.Ю.* Точная константа в неравенстве Питта для преобразований Фурье и Ганкеля // Тезисы докл. VIII Межд. симпозиума «Ряды Фурье и их приложения», 27 мая–3 июня 2014. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. С. 15–16.
3. *Веприцев Р.А., Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с гиперболическим весом // Материалы XV Межд. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 24–28.
4. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Материалы XV Межд. научн. конф.

«Современные проблемы математики, механики, информатики», 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 29–36.

5. *Горбачев Д.В., Иванов В.И.* Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям функций Якоби // Материалы XV Межд. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», 15–19 сентября 2014. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 36–42.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Проводил совместные исследования с профессорами C. Thiele и С. Тихоновым в рамках проекта «Harmonic Analysis and Partial Differential Equations» в Математическом институте им. Хаусдорфа университета Бонна, Германия, 21–31 августа 2014. По результатам исследований готовится к публикации работа «Wiener's problem for positive definitive functions», получены другие результаты в области гармонического анализа.

Являюсь исполнителем гранта РФФИ № 13-01-00045 «Гармонический анализ Данкля и экстремальные задачи теории приближений и теории функций» в коллективе математиков механико-математического факультета Тульского государственного университета под руководством В.И. Иванова.

Руководитель госзадания № 5414ГЗ Министерства образования и науки РФ по теме «Экстремальные задачи гармонического анализа Фурье и Данкля».

5. Педагогическая деятельность

В 2014 г. я продолжаю преподавательскую деятельность в должности профессора на кафедре прикладной математики и информатики механико-математического факультета (теперь Институт прикладной математики и компьютерных наук) Тульского государственного университета. В весеннем семестре читал курсы «Вариационное исчисление и оптимальное управление» (3 курс), «Методы защиты информации» (4 курс), вел практические и лабораторные занятия по ним. В осеннем семестре читал курсы «Методы оптимизации» (4 курс), «Теория приближений» (магистры 2 года обучения), вел практические занятия по ним.

Научное руководство:

С.С. Свистунов, аспирант ТулГУ. Защитил кандидатскую диссертацию «Интерактивный рендеринг при помощи сферических дизайнов для низкочастотного окружающего освещения» 18 декабря 2013 г. в Совете ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». Утвержден в степени кандидата физико-математических наук в мае 2014 г.

Также под мои руководством продолжают обучение несколько студентов магистратуры и дипломников ТулГУ.

Издано пособие: *Горбачев Д.В.* Численные методы решения экстремальных задач. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 114 с.