Отчет за 2014 год по гранту фонда «Династия»

Герман О. Н.

Полученные за этот год результаты

В этом году удалось получить новые теоремы переноса. Главным объектом исследования были *диофантовы экспоненты решёток*, характеризующие, насколько “быстро” убывает минимум произведения координат ненулевых точек данной решётки.

Определение 1. Пусть Λ — решётка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Обозначим через $\Pi(\mathbf{v})$ среднее геометрическое модулей координат точки $\mathbf{v}$. *Диофантовой экспонентой* решётки Λ называется величина

$$\beta(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists \mathbf{v} \in \Lambda \backslash \{\mathbf{0}\} : \Pi(\mathbf{v}) \leqslant |\mathbf{v}|^{-\gamma}\right\}.$$

Для $\beta(\Lambda)$ удалось доказать следующий аналог теоремы переноса Хинчина:

Теорема 1. *Пусть Λ — решётка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1 и пусть Λ^* — двойственная решётка. Тогда*

$$\beta(\Lambda^*) \geqslant \frac{\beta(\Lambda)}{d(d-2)\beta(\Lambda) + (d-1)^2}\,.$$

Метод, использовавшийся для доказательства данной теоремы, обобщает на случай многопараметрических семейств решёток и параллелепипедов параметрическую геометрию чисел Шмидта-Суммерера. В контексте этого подхода теорему 1 удобно переформулировать в терминах последовательных минимумов. Напомним, что k-м последовательным минимумом $\mu_k(M, \Lambda)$ тела M относительно решетки Λ называется минимальное $\mu > 0$, такое что μM содержит k линейно независимых точек решетки Λ.

Определение 2. Пусть Λ — решётка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Обозначим через B единичный шар в sup-норме (это будет куб с вершинами в точках с координатами ± 1). Положим для каждого набора $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$

$$D_{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_d \end{pmatrix}.$$

Величины

$$\underline{\psi}_k(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{существуют } \boldsymbol{\tau} \text{ со сколь угодно большим } |\boldsymbol{\tau}|, \text{ такие что } \lambda_k(D_{\boldsymbol{\tau}} B, \Lambda) \leqslant |\boldsymbol{\tau}|^{-\gamma}\right\},$$

$$\overline{\psi}_k(\Lambda) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{существует такое } t, \text{ что для всех } \boldsymbol{\tau}, \text{ удовлетворяющих условию } |\boldsymbol{\tau}| = t, \text{ справедливо } \lambda_k(D_{\boldsymbol{\tau}} B, \Lambda) \leqslant t^{-\gamma}\right\},$$

будем называть соответственно *нижними* и *верхними экспонентами Шмидта–Суммерера* решётки Λ.

Теорему 1 можно переформулировать в терминах экспонент Шмидта–Суммерера:

Теорема 2. *Пусть* Λ *— решётка в* $\mathbb{R}^d$ *с определителем* 1 *и пусть* Λ^* *— двойственная решётка. Тогда*

$$\underline{\psi}_1(\Lambda^*) \geqslant \frac{\underline{\psi}_1(\Lambda)}{(d-1)^2}\,.$$

Кроме этой теоремы удалось также получить неравенство для $\overline{\psi}_1(\Lambda)$ и $\overline{\psi}_1(\Lambda^*)$, являющееся аналогом теорем Ярника и автора для равномерных диофантовых экспонент. Соответствующая теорема выглядит следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* Λ *— решётка в* $\mathbb{R}^d$ *с определителем* 1 *и пусть* Λ^* *— двойственная решётка. Тогда*

$$\overline{\psi}_1(\Lambda^*) \geqslant \frac{\overline{\psi}_1(\Lambda)}{(d-1)^2 + (d-1)\min(0, \overline{\psi}_1(\Lambda) - 1)}\,.$$

Приведённые результаты включены в готовящийся большой обзор о диофантовых экспонентах. В ближайших планах — продолжить перенос параметрической геометрии чисел на многопараметрический случай, с тем чтобы применить получающиеся результаты в контексте гипотезы Литтлвуда и гипотезы Оппенгейма для произведения линейных форм.

Опубликованные и поданные в этом году работы

[1] О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов *Усиление теоремы переноса Малера*, Известия РАН, Серия математическая., **79**:1 (2015), 3–16.

[2] О. Н. Герман *Диофантовы экспоненты*, обзор, будет подано в УМН.

Участие в работе конференций

- “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения” (Тула, апрель 2014), пленарный доклад
- Easter school “Dynamics and Analytic Number Theory” (Дарем, Великобритания, март–апрель 2014), без доклада
- “Approximation diophantienne et transcendance” (Люмини, Франция, сентябрь 2014), без доклада

Педагогическая деятельность

- Курс “Теория чисел”, мехмат, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс “Элементарная теория чисел”, мехмат, 1-й курс, семинары
- Курс “Теория чисел”, Бакинский филиал МГУ, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс “Дополнительные главы алгебры и теории чисел”, Бакинский филиал МГУ, 1-й год магистратуры, лекции и семинары
- Курс “Алгебра”, СУНЦ МГУ, 10-й класс, лекции и семинары
- Заведование кафедрой математики СУНЦ МГУ
- Научное руководство тремя аспирантами (Константин Евдокимов, Илья Макаров, Михаил Лысов) и тремя студентами (Ибрагим Тлюстангелов, Вероника Мингалеева, Эльмир Бигушев)