

Отчет по гранту фонда “Династия” за 2014 год

Алексей Буфетов

1 Краткое описание результатов

В этом разделе я кратко опишу результаты работ [4] и [5] из приведенного ниже списка.

Пусть $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ — диаграмма Юнга. Будем обозначать символом \mathbb{Y} множество диаграмм Юнга.

Алгебра симметрических функций Λ определяется как алгебра, порожденная степенными функциями Ньютона $p_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, $k \in \mathbb{N}$; переменные и бесконечные суммы по индексам считаются формальными. Важный линейный базис в этой алгебре определяется многочленами Шура, задаваемыми для конечного числа переменных формулой

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det \left(x_i^{\lambda_j + N - j} \right)_{i,j=1}^N}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}.$$

Эти функции можно естественным образом рассматривать как элементы Λ .

Можно задаться вопросом: какие существуют гомоморфизмы $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, которые неотрицательны на всех функциях Шура: $\phi(s_{\lambda}) \geq 0$? Оказывается, этот вопрос эквивалентен ряду других вопросов, формулируемых в контексте представлений симметрической группы, теплицевых матриц, вероятностных мер на графе Юнга и т.д. Ответ на этот вопрос дается теоремой Тома, предоставляющей классификацию всех таких гомоморфизмов. Различные доказательства этой теоремы были даны Е. Тома, А. Вершиком и С. Керовым, А. Окуньковым. В работе [5] (совместно с В. Гориним) изучаются некоторые комбинаторные свойства диаграмм Юнга; в качестве одного из следствий, мы получаем новое доказательство теоремы Тома, основанное исключительно на вероятностных и комбинаторных идеях (в то время как все предшествующие доказательства использовали алгебраические или аналитические методы).

Функции Холла-Литтлвуда P_λ являются важной однопараметрической деформацией функций Шура. Классификация всех гомоморфизмов, неотрицательных на всех P_λ , является открытой проблемой, известной как *гипотеза Керова*. В статье [4] (совместно с Л. Петровым) был изучен тесно связанный с этой гипотезой вопрос. А именно, в одной из переформулировок этой гипотезы важную роль играют вероятностные меры на растущих диаграммах Юнга. В [4] нам удалось доказать закон больших чисел для длин первых строк и столбцов этих диаграмм Юнга. По всей видимости, это первый результат, связанный с гипотезой Керова для многочленов Холла-Литтлвуда, за последние 20 лет.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1) A. Borodin, A. Bufetov, “Plancherel representations of $U(\infty)$ and correlated Gaussian Free Fields”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 163, no. 11 (2014), 2109-2158; [arXiv:1301.0511](#).

2) A. Borodin, A. Bufetov, G. Olshanski, “Limit shapes for growing extreme characters of $U(\infty)$ ”, to appear in *Annals of Applied Probability*, [arXiv:1311.5697](#).

3) A. Bufetov, V. Gorin, “Representations of classical Lie groups and quantized free convolution”, to appear in *Geometric And Functional Analysis*, [arXiv:1311.5780](#).

4) A. Bufetov, L. Petrov, “Law of Large Numbers for Infinite Random Matrices over a Finite Field”, [arXiv:1402.1772](#), submitted.

5) A. Bufetov, V. Gorin, “Stochastic monotonicity in Young graph and Thoma theorem”, [arXiv:1411.3307](#), submitted.

3 Участие в конференциях и школах

1) Участие в Workshop “From Macdonald processes to Hecke Algebras and Quantum Integrable Systems”, IHP, Paris; May.

2) Участие в конференции “Symposium about Mathematics”, University of Zurich; December.

4 Работа в научных центрах и международных группах

1) Научный визит в Massachusetts Institute of Technology, Boston; February — April.

5 Педагогическая деятельность

1) Учебный ассистент по курсу “Эргодическая теория”, математический факультет ВШЭ, осень 2014.

2) Учебный ассистент по курсу “Математический анализ-1”, НМУ, осень 2014.

3) лектор на школе “Современная математика”, июль 2014.