ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА «ДИНАСТИЯ» ЗА 2014 ГОД.

А.С. АНАНЬЕВСКИЙ

1. Результаты, полученные в 2014 году

Основным результатом, полученным мною в этом году, является явное построение трансферов вдоль проективных морфизмов для обобщенных мотивных теорий когомологий при условии обратимости стабильного элемента Хопфа. Предложенная мною конструкция является обобщением определенных А.Ненашевым трансферов для производных групп Витта и применима к любой теории когомологий, представимой в стабильной мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского.

Один из подходов к построению трансферов в классической алгебраической топологии основан на использовании двойственности Атьи. А именно, предположим, что у нас имеется отображение $f\colon Y \to X$ между гладкими компактными многообразиями и некоторый спектр A, представляющий теорию когомологий $A^*(-)$. Отображение f определяет двойственное отображение $f^\vee\colon (\Sigma^\infty X)^\vee \to (\Sigma^\infty Y)^\vee$ между двойственными к надстроечным спектрам объектами, где двойственный к спектру E определяется как $E^\vee = Hom(E, \mathbb{S})$ для сферического спектра $\mathbb{S}$. Двойственность Атьи утверждает, что для гладкого компактного многообразия M размерности d_M имеет место изоморфизм $(\Sigma^\infty M)^\vee \cong \Sigma^\infty Th(N_M)[-m - d_M]$, где $Th(N_M)$ – пространство Тома стабильного нормального расслоения (нормального расслоения вложения $M \to \mathbb{R}^m$ для достаточно большого m). Таким образом на когомологиях мы получаем отображение

$$(f^\vee)^A\colon A^{*+m_Y+d_Y}(\Sigma^\infty Th(N_Y)) \to A^{*+m_X+d_X}(\Sigma^\infty Th(N_X)).$$

При помощи изоморфизмов Тома (если они имеют место для теории $A^*(-)$) можно отождествить $A^{*+m_Y+d_Y}(\Sigma^\infty Th(N_Y)) \cong A^{*+d_Y}(Y)$ и аналогично для X, получая трансфер

$$f_A\colon A^{*+d_Y}(Y) \to A^{*+d_X}(X).$$

Отметим, что эта схема рассуждений состоит из двух ингредиентов — единообразная для всех теорий когомологий часть, использующая двойственность Атьи, и специфичные для выбранного спектра A изоморфизмы Тома. Например, для когомологий с целыми коэффициентами использованные изоморфизмы Тома имеют место только для ориентированных многообразий; для комплексной K–теории аналогичные изоморфизмы есть для $spin^c$-многообразий. Мною был построен мотивный аналог отображения $(f^\vee)^A$ (далее я буду называть его «геометрическим трансфером») при условии обратимости стабильного элемента Хопфа. Предложенная мной конструкция не использует двойственности Атьи и основана на некоторых явных вычислениях с когомологиями пространств Тома векторных расслоений над проективными пространстами.

В качестве первого шага для построения трансферов в мотивном контексте был развит формализм обобщенных мотивных когомологий, подкрученных при помощи формальной разности векторных расслоений. Зафиксируем некоторый спектр A, представляющий обобщенную мотивную теорию когомологий $A^{*,*}(-)$. Для гладкого алгебраического многообразия X и векторных расслоений E_1, E_2 над X можно определить $A^{*,*}(X; E_1 \ominus E_2)$ как когомологии с носителем на нулевом сечении некоторого векторного расслоения, а именно,

$$A^{*,*}(X; E_1 \ominus E_2) = A_Y^{*+2m,*+m}(p^* E_1 \oplus E_2'),$$

где $p\colon Y \to X$ — некоторое $\mathbb{A}^d$–расслоение, Y — аффинное, E_2' — некоторое векторное расслоение такое, что $E_2' \oplus p^*E_2$ — тривиальное векторное расслоение над Y, и $m = \operatorname{rank} E_1 \oplus \operatorname{rank} E_2'$. Оказывается, что это определение обладает рядом хороших свойств, в частности, оно функториально, если помнить про выбор E_2' и тривиализацию расслоения $E_2' \oplus p^*E_2$. Кроме того, $A^{*,*}(X; E_1 \ominus E_2)$ как модуль над $A^{*,*}(X)$ зависит только от класса $[E_1]-[E_2]$ в $\widetilde{K}_0(X)$, в частности, для многообразия X такого, что $K_0(X) = \mathbb{Z}$, все группы $A^{*,*}(X; E_1 \ominus E_2)$ неканонически изоморфны. Например,

$$A^{*,*}(\mathbb{A}^n - \{0\}; \ominus T_{\mathbb{A}^n-\{0\}}) \cong A^{*,*}(\mathbb{A}^n - \{0\}) = A^{*-2n+1,*-n}(pt).$$

Хорошо известная конструкция деформации к нормальному расслоению позволяет позволяет построить геометрический трансфер

$$i_A\colon A^{*,*}(Y; \ominus T_Y) \to A^{*+2c,*+c}(X; \ominus T_X),$$

где $i\colon Y \to X$ — замкнутое вложение коразмерности c. Поэтому для построения геометрических трансферов вдоль проективных морфизмов достаточно построить геометрические трансферы для проекций $X \times \mathbb{P}^k \to X$. Последние трансферы можно построить опираясь на вычисление когомологий $A^{*,*}(X \times \mathbb{P}^k; \ominus T_{X\times\mathbb{P}^k})$.

Напомним, что в мотивном контексте многообразия $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ и $\mathbb{P}^1$ являются сферами $S^{3,2}$ и $S^{2,1}$ соответственно, поэтому проекция $\mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1$ соответствует некоторому элементу $\eta \in A^{-1,-1}(pt)$ в кольце коэффициентов. Этот элемент называется стабильным элементом Хопфа и является некоторым мотивным аналогом числа 2 (при взятии вещественных точек рассмотренная выше проекция гомотопически эквивалентна двукратному наматыванию окружности на себя). Мною была получена следующая теорема, описывающая обобщенные теории когомологий пространств Тома векторных расслоений над проективными пространствами после обращения стабильного элемента Хопфа в коэффициентах.

Теорема. *Рассмотрим гладкое многообразие X и кольцевой спектр A. Обозначим $p\colon X \times \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ каноническую проекцию. Рассмотрим векторные расслоения E, E'*

над $\mathbb{P}^k$, положим $d = \deg\det E - \deg\det E'$. Для рациональной точки $a \in \mathbb{P}^k$ обозначим $i_a\colon X \to X \times \mathbb{P}^k$ замкнутое вложение, задаваемое равенством $i_a(x) = (x, a)$. Имеют место следующие изоморфизмы:

Ia) $d = 2m-1$, $k = 2n-1$: $A^{*,*}_\eta(X \times \mathbb{P}^k; p^*E \ominus p^*E') = 0$.
Ib) $d = 2m$, $k = 2n-1$: $A^{*,*}_\eta(X \times \mathbb{P}^k; p^*E \ominus p^*E') \cong A^{*,*}_\eta(X) \oplus A^{*-2k,*-k}_\eta(X)$.
IIa) $d = 2m-1$, $k = 2n$: $A^{*,*}_\eta(X \times \mathbb{P}^k; p^*E \ominus p^*E') \cong A^{*-2k,*-k}_\eta(X)$.
IIb) $d = 2m$, $k = 2n$: $A^{*,*}_\eta(X \times \mathbb{P}^k; p^*E \ominus p^*E') \cong A^{*,*}_\eta(X)$.

В случае $E = E' = 0$ эта теорема является мотивным обобщением хорошо известных вычислений колец $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^k, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ и $KO^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^k) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Для проектиного пространста размерности $2n$ мы имеем $\det T_{\mathbb{P}^{2n}} = \mathcal{O}(2n+1)$, и полученная теорема влечет, что геометрический трансфер

$$(i_a)_A\colon A^{*,*}(X; \ominus T_X) \to A^{*+4n,*+2n}(X \times \mathbb{P}^{2n}; \ominus T_{X\times\mathbb{P}^{2n}})$$

является изоморфизмом. Можно показать, что гомоморфизм $(i_a)_A$ не зависит от выбора рациональной точки a. Для проекции $\pi\colon X \times \mathbb{P}^{2n} \to X$ определим геометрический трансфер π_A как обратный к $(i_a)_A$,

$$\pi_A = ((i_a)_A)^{-1}\colon A^{*,*}(X \times \mathbb{P}^{2n}; \ominus T_{X\times\mathbb{P}^{2n}}) \to A^{*-4n,*-2n}(X; \ominus T_X).$$

Раскладывая произвольный проективный морфизм $f\colon Y \to X$ коразмерности c в композицию $Y \xrightarrow{i} X \times \mathbb{P}^{2n} \xrightarrow{\pi} X$ замкнутого вложения и проекции определим геометрический трансфер f_A как

$$f_A = \pi_A \circ i_A\colon A^{*,*}(Y; \ominus T_Y) \to A^{*+2c,*+c}(X; \ominus T_X).$$

Можно показать, что построенный гомоморфизм f_A не зависит от выбора разложения $f = \pi \circ i$. Кроме того, построенные геометрические трансферы функториальны, удовлетворяют формуле проекции и согласованы с трансверсальными квадратами. Результаты, касающиеся построения геометрических трансферов, представлены в выложенном на архив препринте arXiv:1406.2894.

Помимо описанных выше результатов, мною совместно с А.Лузгаревым было построено $\mathbb{A}^1$–клеточное разбиение расщепимой четномерной аффинной квадрики

$$X_{2n} = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n + z^2 = 1\}.$$

Показано, что для подмногообразия

$$Z = \{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0, z = -1\} \cong \mathbb{A}^n$$

дополнение $X_{2n} - Z$ является стягиваемым в $\mathbb{A}^1$–гомотопической категории, откуда следует гомотопическая эквивалентность $(X_{2n}, x) \simeq \mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n - \{0\})$. Этот результат пока не опубликован, поскольку планируется построить $\mathbb{A}^1$–клеточные разбиения еще для ряда однородных многообразий, в частности, для многообразия $G(F_4)/Spin_9$, однородного под действием расщепимой исключительной группы типа F_4.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) A. Ananyevskiy, *The special linear version of the projective bundle theorem,* Compositio Mathematica (опубликовано онлайн 7 ноября 2014 года, бумажная копия еще не вышла)
(2) A. Ananyevskiy, *On the push-forwards for motivic cohomology theories with invertible stable Hopf element,* arXiv:1406.2894

3. Участие в научных школах и конференциях

(1) Доклад «Special linear oriented cohomology theories», Oriented theories and symplectic cobordism, Duisburg-Essen University, Essen, Germany, 16.06.14-23.06.14
(2) Доклад «Some computations with motivic generalized cohomology theories», конференция «Наука будущего», СПбГУ, Санкт-Петербург, 17.09.14-20.09.14

4. Работа в научных центрах и международных группах

(1) Сотрудник Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

5. Педагогическая деятельность

(1) Весной 2014 года вел семинары по алгебре и теории чисел на математико-механическом факультете СПбГУ.
(2) Организовывал семинары по $\mathbb{A}^1$-топологии, K-теории и алгебраической геометрии в лаборатории им. Чебышева.