

ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА «ДИНАСТИЯ» ЗА 2013 ГОД.

А.С. АНАНЬЕВСКИЙ

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2013 ГОДУ

Основные результаты, полученные мною в этом году, заключаются в перенесении некоторых классических топологических утверждений в контекст \mathbb{A}^1 -гомотопической теории. В. Воеводский вместе Ф. Морелем построили теорию, позволяющую применять гомотопические методы к алгебраическим многообразиям, воспринимая аффинную прямую \mathbb{A}^1 как интервал, при помощи которого производятся гомотопии. Доказательства аналогов классических топологических теорем в \mathbb{A}^1 -гомотопическом контексте зачастую сопряжены со значительными трудностями. В качестве одного из примеров можно отметить вычисление Ф. Мореля $[\mathbb{A}^n - 0, \mathbb{A}^n - 0]_{\bullet} \cong GW(k)$, где $GW(k)$ – кольцо Гротендика-Витта квадратичных форм базового поля; этот изоморфизм является аналогом классического вычисления $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ и крайне нетривиален, доказательство занимает несколько десятков страниц.

Мною был получен аналог изоморфизма Коннера-Флойда, выражающего K -теорию через кобордизмы. А именно, было показано, что для гладкого многообразия X имеет место изоморфизм

$$MSL_{\eta}^{*,*}(X) \otimes_{MSL^{4*,2*}(pt)} W^{2*}(pt) \xrightarrow{\cong} W^*(X)[\eta, \eta^{-1}].$$

Здесь $MSL^{*,*}(X)$ – это SL -кобордизмы многообразия X , которые определяются при помощи спектра MSL , состоящего из пространств Тома универсальных расслоений над классифицирующими пространствами $B SL_n$. С вещественной точки зрения эти кобордизмы являются алгебраическими аналогами ориентированных кобордизмов, так как группа $SL_n(\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна компактной SO_n . $W^*(X)$ – это производные группы Витта многообразия X , которые являются 4-периодической теорией когомологий и допускают описание в стиле групп K_0 , только используя самодвойственные расслоения (и комплексы таких расслоений). С вещественной точки зрения они являются алгебраическим аналогом вещественной K -теории с обращенной 2 в коэффициентах, а именно, можно построить спектр, представляющий группы Витта в \mathbb{A}^1 -контексте, и его вещественная реализация даст спектр, представляющий KO с обращенной двойкой. Наконец η – это стабильное отображение Хопфа, которое является стабилизацией классического отображения Хопфа $\mathbb{A}^2 - 0 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $(x, y) \mapsto [x : y]$. Вещественные точки этого отображения дают двулистное

накрытие окружности, и обращение стабильного отображения Хопфа в коэффициентах (в \mathbb{A}^1 -контексте гомотопические группы биградуированы и η лежит в стабильной группе $\pi_{1,1}^s(pt)$) соответствует обращению двойки в коэффициентах в классической ситуации.

В качестве промежуточного результата был получен изоморфизм

$$BO_{\eta}^{*,*}(X) \cong W^*(X)[\eta, \eta^{-1}],$$

где $BO_{\eta}^{*,*}(X) \cong GW_*^{[*]}(X)$ – высшие группы Гротендика-Витта (эрмитова K -теория) многообразия X , которые были определены М. Шлихтингом. Эрмитова K -теория является алгебраическим аналогом вещественной K -теории так же, как алгебраическая K -теория Квиллена является аналогом комплексной K -теории. Стабильное отображение Хопфа соответствует элементу $\langle -1 \rangle \in W^0(pt) \cong BO^{-1,-1}(pt)$, и обращение этого элемента тривиализует всю «высшую» часть эрмитовой K -теории, оставляя только производные группы Витта, которые, как уже отмечалось, допускают элементарное описание на языке комплексов самодвойственных расслоений.

Доказательство указанного выше изоморфизма типа Коннера-Флойда основывается на использовании симплектического аналога такого изоморфизма, полученного И. Паниным и Ч. Вальтером, а также теории характеристических классов, построенных мною в 2012-2013 годах для SL -ориентированных теорий когомологий. Эти классы являются аналогами классов Эйлера и Понтрягина; причем, как в классическом контексте формула для полного класса Понтрягина $p_*(E_1 \oplus E_2) = p_*(E_1)p_*(E_2)$ выполняется, вообще говоря, только после обращения двойки, так и для построенных мною классов аналогичная формула выполняется только после обращения стабильного отображения Хопфа η (вещественные точки которого, как уже упоминалось, дают двойку в коэффициентах).

Помимо описанных выше результатов мною было показано, что к SL -ориентированным теориям, помимо уже упомянутых эрмитовой K -теории, производных групп Витта и MSL -кобордизмов, относятся ориентированные группы Чжоу $\widetilde{CH}^*(X)$ (они же – группы Чжоу-Витта), которые можно определить при помощи комплекса Герстена для неразветвленных K -групп Милнора-Витта (это определение – аналог описания обычных групп Чжоу через K -теорию Милнора, $CH^n(X) = H^n(X, K_n^M)$). Ориентированные группы Чжоу являются некоторым \mathbb{A}^1 -гомотопическим аналогом когомологий с целыми коэффициентами, в частности, известно, что препятствием к существованию тривиального линейного подрасслоения в векторном расслоении является класс Эйлера со значением в ориентированных группах Чжоу (над незамкнутым полем это, вообще говоря, более тонкий инвариант, чем старший класс Черна). SL -ориентируемость ориентированных групп Чжоу вместе с упомянутыми выше характеристическими классами позволяет производить явные вычисления для некоторого класса многообразий.

Наконец, в 2013 году, мною, вместе с соавторами, были построены некоторые исключительные наборы векторных расслоений на однородных многообразиях малой размерности. Эти результаты были получены как следствие наглядного описания базиса Стейнберга для кольца представлений $R(H)$ как модуля над $R(G)$, где $H \leq G$ – расцепимые односвязные редуктивные группы одинакового ранга. Кроме того, использование этого описания позволяет явно вычислить производные группы Витта некоторых однородных под действием SL_n или Sp_{2n} многообразий (это вычисление пока не опубликовано).

2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

- (1) А.С. Ананьевский, *О соотношении алгебраических MSL -кобордизмов и производных групп Витта*, Доклады Академии Наук, т. 448 №5 (2013), 503-505
- (2) А. Ananyevskiy, A. Auel, S. Garibaldi, K. Zainoulline, *Exceptional collections of line bundles on projective homogeneous varieties*, Advances in Mathematics, vol. 236 (2013), 111-130
- (3) А. Ananyevskiy, *The special linear version of the projective bundle theorem*, arXiv:1205.6067 (подана в печать)
- (4) А. Ananyevskiy, *On the relation of special linear algebraic cobordism to Witt groups*, arXiv:1212.5780 (подана в печать)

3. УЧАСТИЕ В НАУЧНЫХ ШКОЛАХ И КОНФЕРЕНЦИЯХ

- (1) Доклад «SL-oriented cohomology theories», Spring School and Workshop on Torsors, Motives and Cohomological Invariants, The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, Canada, 1.05.13-17.05.13
- (2) Доклад «Cohomology theories with invertible Hopf element», Workshop «Quantum and motivic cohomology, Fano varieties and mirror symmetry», институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, 26.09.13-28.09.13

4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

- (1) Сотрудник Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

- (1) В 2013 году вел семинары по алгебре и теории чисел на математико-механическом факультете СПбГУ.
- (2) Организовывал семинары по \mathbb{A}^1 -топологии и K -теории в лаборатории им. Чебышева.

6. ДРУГОЕ

В июне 2013 года защитил в дисс. совете при СПбГУ кандидатскую диссертацию по теме «Алгебраическая K -теория некоторых многообразий и смежные вопросы», научный руководитель – И. А. Панин.