ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА «ДИНАСТИЯ» ЗА 2015 ГОД.

А.С. АНАНЬЕВСКИЙ

1. Результаты, полученные в 2015 году

Основные результаты, полученные в этом году связаны с вычислением рациональных стабильных мотивных гомотопических групп.

В топологии хорошо известна теорема о том, что все стабильные гомотопические группы сфер, кроме нулевой, конечны, а нулевая изоморфна $\mathbb{Z}$, откуда $\pi_n(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) = 0$ при $n \neq 0$ и $\pi_0(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q}$ (здесь $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$ – рационализованный сферический спектр). Это результат принадлежит Ж.-П. Серру и может быть получен, например, путем рассмотрения башни Постникова для сферического спектра. С этим результатом тесно связаны изоморфизмы

$$[\mathrm{K}_{\mathbb{Q}}, \mathrm{K}_{\mathbb{Q}}] \cong \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \pi_*(\mathrm{K}_{\mathbb{Q}} \wedge \mathrm{K}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q}[\beta_1^{\pm 1}, \beta_2^{\pm 1}],$$

где $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}}$ – рационализированный спектр комплексной K-теории, а $[\mathrm{K}_{\mathbb{Q}}, \mathrm{K}_{\mathbb{Q}}]$ – это эндоморфизмы $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}}$ в стабильной гомотопической категории, т.е. стабильные операции степени 0 на рационализированной комплексной K-теории. Первый изоморфизм осуществляется следующим образом: операции f ставится в соответствие набор рациональных чисел $f(\beta^n)\beta^{-n}$, где $\beta \in \mathrm{K}^{-2}(\mathrm{pt})$ – элемент Ботта, соответствующий классу $1 - [\mathcal{O}(1)] \in \mathrm{K}^0(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{K}^{-2}(\mathrm{pt})$. Во втором изоморфизме элементам β_1 и β_2 соответствуют отображения

$$\beta \wedge e \colon \mathbb{S}[2] \wedge \mathbb{S} = \mathbb{S}[2] \to \mathrm{K} \wedge \mathrm{K}, \quad e \wedge \beta \colon \mathbb{S} \wedge \mathbb{S}[2] = \mathbb{S}[2] \to \mathrm{K} \wedge \mathrm{K},$$

где $e \colon \mathbb{S} \to \mathrm{K}$ – единичное отображение. В самом деле, эти изоморфизмы легко получить из вышеприведенного результата Серра и того факта, что характер Черна устанавливает изоморфизм $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{EM}(\mathbb{Q})[2n]$ (здесь $\mathrm{EM}(\mathbb{Q})$ – спектр Эйленберга-Маклейна).

Оказывается, что верно и обратное: вычисление операций и коопераций в рационализованной комплексной K-теории (т.е. приведенные выше изоморфизмы) влекут изоморфизм $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}} \cong \mathrm{EM}(\mathbb{Q})$, т.е. результат о рациональных стабильных гомотопических группах сфер. В самом деле, описание операций позволяет представить $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}}$ в виде прямой суммы $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$, где каждое слагаемой соответствует одной копии $\mathbb{Q}$. Далее, глядя на коэффициенты, можно получить изоморфизмы $E_n \cong \mathrm{EM}(\mathbb{Q})[2n]$, откуда, при помощи вычисления коопераций следует $\mathrm{EM}(\mathbb{Q}) \wedge \mathrm{EM}(\mathbb{Q}) \cong \mathrm{EM}(\mathbb{Q})$. Искомый изоморфизм $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}} \cong \mathrm{EM}(\mathbb{Q})$ следует из рассмотрения треугольника

$$(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}})_{\geq 1} \to \mathbb{S}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{EM}(\mathbb{Q}),$$

где $(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}})_{\geq 1}$ – 0-связное накрытие $\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$.

Нашей целью в совместной работе с И. Паниным и М. Левинем был перенос этого рассуждения в мотивный контекст. Мотивная стабильная гомотопическая категория $\mathcal{SH}(k)$ рационально раскладывается в произведение $\mathcal{SH}(k) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{SH}(k)^+_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{SH}(k)^-_{\mathbb{Q}}$. Д.-Ч. Цисинский и Ч. Деглиз показали, что имеет место изоморфизм

$$\mathcal{SH}(k)^+_{\mathbb{Q}} \cong DM(k) \otimes \mathbb{Q},$$

откуда, в частности, $\pi^+_{m,n}(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{H}^{-m}_{mot}(k, \mathbb{Q}(-n))$, где справа написаны мотивные когомологии поля. Поэтому нам достаточно было рассматривать $\mathcal{SH}(k)^-_{\mathbb{Q}}$. Мною было получено явное описание операций и коопераций в производных группах Витта с рациональными коэффициентами,

$$[\mathrm{KW}_{\mathbb{Q}}, \mathrm{KW}_{\mathbb{Q}}] \cong \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{W}_{\mathbb{Q}}(k), \quad \pi_{*,*}(\mathrm{KW}_{\mathbb{Q}} \wedge \mathrm{KW}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{W}^*_{\mathbb{Q}}(k)[\beta_1^{\pm 1}, \beta_2^{\pm 1}],$$

причем эти изоморфизмы устроены аналогично изоморфизмам для комплексной K-теории в топологии. Из этих вычислений в совместной с И. Паниным и М. Левинем работе выводится $\pi^-_{m,n}(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) = 0$ при $m \neq n$ и $\pi^-_{n,n}(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{W}(k) \otimes \mathbb{Q}$, где $\mathrm{W}(k)$ – группа Витта квадратичных форм (группа классов изоморфизма квадратичных форм по модулю гиперболических). Таким образом, комбинируя этот результат с результатом Деглиза-Цисинского, можно получить полное описание стабильных мотивных гомотопических групп сфер с рациональными коэффициентами,

$$\pi_{m,n}(\mathbb{S}_{\mathbb{Q}}) = \left[\begin{array}{ll} \mathrm{H}^{-m}_{mot}(k, \mathbb{Q}(-n)), & m \neq n, \\ \mathrm{H}^{-n}_{mot}(k, \mathbb{Q}(-n)) \oplus \mathrm{W}(k) \otimes \mathbb{Q}, & m = n. \end{array} \right.$$

Кроме того, нами была получена эквивалентность категории $\mathcal{SH}(k)^-_{\mathbb{Q}}$ и некоторой категории, основанной на категории модулей над пучком групп Витта с рациональными коэффициентами.

2. Сравнение результатов с заявкой

Как и предполагалось в заявке, мною была развита техника работы с SL-ориентированными теориями когомологий, определены классы Понтрягина для таких теорий и доказаны различные их свойства, в частности, показано, что при условии обратимости стабильного элемента Хопфа (аналог обратимости двойки в топологии), когомологии классифицирующего пространства BSL_{2n+1} – это ряды на классах Понтрягина тавтологического расслоения, а когомологии BSL_{2n} – ряды на классах

Понтрягина и классе Эйлера. Эта техника была применена к доказательству версии теоремы Коннера-Флойда, восстанавливающей производные группы Витта по алгебраическим MSL-кобордизмам.

Вместо явных вычислений производных групп Витта и эрмитовой K-теории некоторых многообразий я в основном занимался общим (достаточно успешным) изучением мотивных теорий когомологий с обратимым элементом Хопфа и изучением минус-части стабильной мотивной гомотопической категории. Были построены трансферы для теорий когомологий с обратимым элементом Хопфа, получено описание минус-части через модули над пучком колец Витта и вычислены стабильные мотивные гомотопические группы сфер с рациональными коэффициентами.

3. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) A. Ananyevskiy, *The special linear version of the projective bundle theorem,* Compositio Mathematica, 151:3 (2015), 461–501
(2) A. Ananyevskiy, *On the push-forwards for motivic cohomology theories with invertible stable Hopf element,* Manuscripta Mathematica, опубликовано онлайн 30 октября 2015 (бумажная версия еще не вышла)
(3) A. Ananyevskiy, *On the relation of special linear algebraic cobordism to Witt groups,* Homology, Homotopy and Appications, принято к печати
(4) A. Ananyevskiy, *Stable operations and cooperations in derived Witt theory with rational coefficients,* arXiv:1504.04848
(5) A. Ananyevskiy, M. Levine, I. Panin,, *Witt sheaves and the η-inverted sphere spectrum,* arXiv:1504.04860

4. Участие в научных школах и конференциях

(1) Доклад «Мотивный аналог теоремы Серра о конечности гомотопических групп сфер», конференция "Встреча поколений Независимый Московский университет, Москва, 9-11 июня 2015
(2) Доклад «Operations in derived Witt theory», minisymposium «Motivic Homotopy Theory and its application to problems in Algebra and Algebraic Geometry», Hamburg, Germany, 24-25 September 2015

5. Работа в научных центрах и международных группах

(1) В январе-марте 2015 года принимал участие в программе «The Topology of Algebraic Varieties» в Institute for Advanced Study, Princeton.

6. Педагогическая деятельность

(1) Организовывал семинары по $\mathbb{A}^1$-топологии, K-теории и алгебраической геометрии в лаборатории им. Чебышева.