Отчет
по програме фонда «Династия»
за 2013 год

Подольский Владимир

Результаты, полученные в 2013 году

В области сложности булевых схем исследовались вопросы вычисления булевых функций пороговыми элементами над произвольным базисом $\{a, b\}$. Пороговым элементом для булевой функции $f\colon \{a,b\}^n \to \{-1,1\}$ называется целочисленный многочлен p от n переменных, такой что для всякого $x \in \{a,b\}^n$
$$f(x) = \operatorname{sgn} p(x).$$
Основные меры сложности пороговых элементов – это степень (обычная степень многочлена) и длина (число мономов в многочлене). Пороговые элементы ранее изучались в основном для случаев $\{a,b\} = \{0,1\}$ и $\{a,b\} = \{-1,1\}$. Описанные далее результаты формулируются для случая $\{a,b\} = \{1,2\}$, но остаются верными для произвольного $\{a,b\}$, по существу отличающегося от $\{0,1\}$ и $\{-1,1\}$.

Установлена тесная связь пороговых элементов в базисе $\{1,2\}$ с пороговыми схемами глубины 2. Пороговой схемой называется булева схема, в качестве элементов которой используются линейные (как многочлены) пороговые элементы. Вопрос о доказательстве сверхполиномиальной оценки размера пороговых схем глубины 2, вычисляющих конкретную функцию, является одним из основных открытых вопросов в теории сложности булевых схем.

В частности, доказано, что пороговые элементы над базисом $\{1,2\}$ полиномиальной (от числа переменных) степени и полиномиальной длины вычисляют в точности те же функции, что и пороговые схемы глубины 2 с полиномиальными коэффициентами на нижнем уровне. Для этого класса пороговых булевых схем известна экспоненциальная нижняя оценка сложности вычисления явно заданных функций, например функции скалярного произведения в поле из двух элементов. Доказано, что эта оценка переносится в модель пороговых элементов полиномиальной длины (без ограничения на степень). При дополнительном предположении о различии некоторых классов пороговых булевых схем доказано, что сверхполиномиальная степень усиливает модель пороговых элементов: существуют функции, вычислимые пороговыми элементами полиномиальной длины, но не вычислимые пороговыми элементами полиномиальной длины и полиномиальной степени.

В качестве приложения анализа пороговых элементов в базисе $\{1,2\}$ доказано, что из сильной нижней оценки вероятностной коммуникационной сложности с тремя игроками в модели “Число на лбу” с вероятностью ошибки сколь угодно близкой к $1/2$ следует сильная нижняя оценка сложности вычисления явно заданной функции в модели пороговых булевых схем глубины 2. На данный момент такой оценки коммуникационной сложности не известно.

Краткая версия работы с этими результатами опубликована в трудах конференции MFCS 2013 [2]. Полная версия опубликована в виде препринта [3] и подана для публикации в журнал “Information and Computation”.

В области мин-плюс алгебры исследовался вопрос об аналоге теоремы Гильберта о нулях. Мин-плюс полукольцом называется множество рациональных чисел с операциями взятия минимума, играющей роль мин-плюс сложения, и обычного сложения, играющего роль мин-плюс умножения. Понятие монома в этом полукольце определяется по аналогии с обычными мономами. Многочленам называется мин-плюс сумма (то есть, минимум) различных мономов. В мин-плюс алгебре рассматриваются два варианта определения полиномиального уравнения. В первом варианте уравнения имеют вид $p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$, где p и q – мин-плюс многочлены. Такие уравнения обычно называются мин-плюс уравнениями. Во втором варианте уравнение задается лишь одним многочленом $p(x_1, \ldots, x_n)$ и при этом точка $a \in \mathbb{Q}$ называется корнем такого уравнения, если минимум значения мономов многочлена достигается на как минимум двух мономах. Другими словами, корни такого уравнения – это точки негладкости функции, задаваемой многочленом. Такие уравнения обычно называются тропическими уравнениями.

Что касается аналога теоремы Гильберта о нулях в мин-плюс алгебре, нетрудно показать, что наивная переформулировка этой теоремы в мин-плюс алгебре оказывается неверной для обоих вариантов определения уравнений. Ранее Григорьевым был сформулирован в виде гипотезы и доказан для случая многочленов одной переменной аналог теоремы Гильберта о нулях в двойственной форме для случая тропических уравнений. Мы доказываем эту гипотезу, а также находим тропический аналог теоремы Гильберта о нулях в стандартной (то есть, не двойственной) форме. Также мы находим аналог теоремы Гильберта о нулях для случая мин-плюс уравнений. Этими результаты в настоящий момент готовится к публикации.

В области переписывания запросов к онтологическим базам данных было продолжено исследование длины таких переписываний. Ранее было показано, что вопрос о длине переписывания (для различных видов переписываний) связан с вопросами сложности вычисления булевых функций булевыми схемами (соответственно, для различных моделей булевых схем). Из этого были выведены нижние оценки длины переписывания для различных видов переписываний. В работе [4] было продолжено исследование в этом направлении. А именно, исследовался вопрос о длине переписываний в случае наложения дополнительных ограничений на теорию. Доказано, что уже для случая теории глубины 2 кратчайшие позитивные экзистенциальные переписывания и нерекурсивные “Даталог” переписывания бывают экспоненциальной длины (от длины запроса). Для случая же теорий глубины 1 картина оказывается более сложной: для всякого конъюнктивного запроса может быть построено нерекурсивное “Даталог” переписывание полиномиальной длины, тогда как кратчайшее позитивное экзистенциальное переписывание по прежнему бывает сверхполиномиальной длины. Для доказательства этих результатов было продолжено исследование взаимосвязи переписываний запросов со сложностью булевых функций в различных моделях вычислений. В частности, оказалось, что случай теорий глубины 1 тесно связан с хорошо известной в теории сложности вычислений моделью недетерминированных ветвящихся программ (также называемых контактно-вентильными схемами).

Опубликованные и поданные в печать работы

[1] K. A. Hansen, R. Ibsen-Jensen, V. V. Podolskii, and E. P. Tsigaridas. Patience of matrix games. *Discrete Applied Mathematics*, 161(16-17):2440–2459, 2013.

[2] K. A. Hansen and V. V. Podolskii. Polynomial threshold functions and boolean threshold circuits. In *MFCS*, pages 516–527, 2013.

[3] K. A. Hansen and V. V. Podolskii. Polynomial threshold functions and boolean threshold circuits. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, 20:21, 2013.

[4] S. Kikot, R. Kontchakov, V. V. Podolskii, and M. Zakharyaschev. Query rewriting over shallow ontologies. In *Description Logics*, pages 316–327, 2013.

[5] V. V. Podolskii. Lower bound on weights of large degree threshold functions. *Logical Methods in Computer Science*, 9(2):1–17, 2013.

Участие в конференциях и школах

1. Рождественские математические встречи фонда “Династия”, Москва, 8-11 января 2013, 1 доклад.

2. Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications, Москва, 21-23 июня 2013, 1 доклад.

3. Mathematical Foundations of Computer Science, Клойстернойбург, Австрия 26-30 августа 2013, 1 доклад.

4. Летняя школа CSEDays 2013 по теоретической информатике, Екатеринбург, Россия, 29 июня - 1 июля 2013 года, участие в качестве члена программного комитета без доклада.

5. Tropical aspects in Geometry and Topology Бонн, Германия, 2-6 сентября 2013, 1 приглашенный доклад.

6. Conference on Computability, Complexity and Randomness, Москва 23-27 сентября 2013, 1 доклад.

Работа в научных центрах и международных группах

1. Научная работа в математическом институте Макса Планка в Бонне, 1-29 февраля 2013.

2. Научная работа в университете Калифорнии в Лос Анджелесе, 29 мая - 12 июня 2013.

Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

1. Школа №54. Уроки алгебры в маткалссе, весь год.
2. Math in Moscow. Курс “Computability and Complexity”, весенний и осенний семестр 2013 года.
3. Math in Moscow. Курс независимых занятий “Expander Graphs” для одного студента, осенний семестр 2013 года.
4. МГУ. Спецкурс “Сложность булевых функций”, осенний семестр 2013 года.
5. МГУ. Просеминар по математической логике и информатике для младшекурсников, весь 2013 год.