

Геометрия специальных римановых многообразий

Д. В. Егоров

Отчет 2013 года

1 Результаты

Как известно, уравнение типа Монжа–Ампера — это существенно нелинейное уравнение линейное относительно определителя матрицы Якоби некоторой вещественной функции. В зависимости от типа якобиана выделяют следующие типы уравнений Монжа–Ампера: классические — вещественное и комплексное; определенные в последние десять лет — кватернионное и октонионное (только для двумерного случая).

Одним из знаменитых применений уравнений Монжа–Ампера в геометрии является доказательство Яу гипотезы Калаби о существовании Риччи-плоских метрик на компактных кэлеровых многообразиях с нулевым классом Чжэня. Данное доказательство следует из существования решения у комплексного уравнения Монжа–Ампера, описывающего деформацию кэлеровой (симплектической) структуры.

В заявке нами было предложено исследовать аналог гипотезы Калаби, сводящейся к вопросу о существовании решения у некоторого уравнения Монжа–Ампера, описывающего деформацию не симплектической, а комплексной структуры, точнее $SL(3, \mathbb{C})$ -структуры, индуцирующей комплексную.

Симплектическая и комплексная структура объединяются в понятие G_2 -структуры в вещественной размерности 7 и $Spin(7)$ -структуры в размерности 8. Мы также вводим специальные уравнения Монжа–Ампера, описывающие деформации данных структур*.

Таким образом, нами описаны новые типы уравнений Монжа–Ампера, ранее не встречавшиеся в литературе. Исходно они определяются в инвариантной записи, мы выписываем данные уравнения в октонионных координатах, получая при этом выражения линейные относительно определителя некоторой специальной матрицы, что узаконивает присвоение данным уравнениям имён Монжа и Ампера. Далее мы доказываем их эллиптичность при линеаризации на некоторые обобщения плюрисубгармонических функций, что позволяет с большей уверенностью говорить о существовании хотя бы слабых решений.

*Идея о возможности данного вида уравнений была выдвинута М. Вербицким.

2 Участие в конференциях

- Всероссийская молодежная школа-семинар «Анализ, геометрия и топология», г. Барнаул, 02.10 – 04.10.2013
- Международная конференция «Геометрия и анализ на метрических пространствах», г. Новосибирск, 04.12 – 07.12.2013

3 Работа в научных центрах и международных группах

- Институт математики СО РАН, г. Новосибирск, 15.09 – 15.11.2013