Отчет А.Е. Миронова за 2014 год

1. Полученные результаты.

1. Рассмотрена система квазилинейных уравнений на коэффициенты полиномиального по импульсам интеграла геодезического потока на двумерном торе. Ранее нами было показано, что эта система является полугамильтоновой (т.е. она обладает бесконечным набором законов сохранения и римановыми инвариантами). Доказано, что метрика, ассоциированная с этой системой, является метрикой егоровского типа. С помощью этого факта установлено, что в случае интегралов степени 3 и 4 система эквивалентна одному уравнению. В случае интегралов степени $n = 4$ полученное уравнение является уравнением Эйлера–Лагранжа для некоторого функционала. Таким образом метрики с интегрируемым геодезическим потоком (при $n = 4$) являются критическими точками функционала. Также показано, что при $n = 4$ полученное уравнение имеет формальные периодические решения в виде ряда по малому параметру (результаты получены совместно с М. Бялым).

2. Исследованы собственные функции одномерного оператора Шредингера с полиномиальными потенциалами степени 3 и 4. Совместно с Б. Сапарбаевой доказано, что собственные функции таких операторов выражаются через функции Бейкера–Ахиезера ранга два, т.е. через совместные собственные функции коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, у которых размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных собственных значениях равна 2.

3. Исследовано действие автоморфизмов первой алгебры Вейля на пространстве коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, отвечающих эллиптической спектральной кривой. Совместно с А. Жегловым доказано, что пространство орбит бесконечно.

1.1 Интегрируемые геодезические потоки на двумерном торе.

Пусть $ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(q)dq^i dq^j$ — метрика на двумерном торе. Геодезические поток метрики называется интегрируемым, если гамильтонова система $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$, $H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(q)p_i p_j$, имеет первый интеграл $F(q,p) : T^*T^2 \to \mathbb{R}$, т.е.

$$\dot{F} = \{F, H\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q^1}\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial F}{\partial q^1}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial q^2}\frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial F}{\partial q^2}\right) = 0,$$

такой, что почти всюду F функционально независим с H. Существуют два вида метрик, для которых геодезические потоки допускают полиномиальные интегралы. Если метрика имеет вид $ds^2 = \Lambda(\alpha x+\beta y)(dx^2+dy^2)$ или $ds^2 = (\Lambda_1(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\Lambda_2(\alpha_2 x+\beta_2 y))(dx^2+dy^2)$, то существуют полиномиальные интегралы степеней один или два. Существование метрик с неприводимыми полиномиальными интегралами высоких степеней — открытая проблема.

Мы используем изотермические координаты x, y, $ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2)$. Предположим, что геодезический поток имеет полиномиальный интеграл

$$F = a_0(x, y)p_1^n + a_1(x, y)p_1^{n-1}p_2 + \ldots + a_n(x, y)p_2^n.$$

В.В. Козлов и Н. Денисова доказали, что если Λ — тригонометрический полином, то геодезический поток не может иметь неприводимых интегралов степеней больше, чем два. По теореме Колокольцова

$$a_{n-1} = c_1 + a_{n-3} - a_{n-5} + \ldots, \quad a_n = c_2 + a_{n-2} - a_{n-4} + \ldots,$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. Тогда условие $\{H, F\} = 0$, где $H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2\Lambda}$ эквивалентно системе квазилинейных уравнений вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0, \quad U = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, \Lambda) \tag{1}$$

где $A(U), B(U)$ — некоторые матрицы. Эта система может быть записана в виде законов сохранения и в гиперболической области она имеет римановы инварианты, таким образом система — полугамильтонова.

Для полугамильтоновых систем выполнены следующие равенства

$$\partial_{r_j}\frac{\partial_{r_i}\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \partial_{r_i}\frac{\partial_{r_j}\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad i \neq j \neq k,$$

где r_j — римановы инварианты, $(r_j)_x + \lambda_j(r_j)_y = 0$.

Эти равенства означают, что существует диагональная метрика

$$ds^2 = H_1^2(r)dr_1^2 + \ldots + H_n^2(r)dr_n^2 \tag{2}$$

с символами Кристоффеля $\Gamma^k_{ki} = \frac{\partial_{r_i}\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}, \quad i \neq k$. Сформулируем наши результаты. Ниже мы предполагаем, что $c_1 = 0$. Это может быть достигнуто поворотом в плоскости x, y.

Теорема 1 *Метрика (2) является метрикой егоровского типа, т.е. коэффициенты вращения* $\beta_{ij} = \frac{\partial_{r_i} H_j}{H_i}, \quad i \neq j$ *симметричны* $\beta_{ij} = \beta_{ji}$*, или эквивалентно, существует функция* $A(r)$ *такая, что* $\partial_{r_i} A(r) = H_i^2(r)$.

В следующей теореме мы показываем, что (1) имеет законы сохранения специального вида. По теореме Павлова и Царева это доказывает теорему 1.

Теорема 2 *Система (1) имеет два закона сохранения вида*

$$P(U)_x + Q(U)_y = 0, \quad Q(U)_x + R(U)_y = 0. \tag{3}$$

При $n = 3, 4$ теорема 2 позволяет свести систему (1) к одному уравнению. Мы здесь сформулируем теорему только при $n = 4$.

Теорема 3 *Пусть* $n = 4$ *и* $\lambda(x, y)$ *— периодическое решение уравнения*

$$\Delta\lambda = 2c_2\Lambda - 2a_{11} - 2a_{22}.$$

Тогда функция λ *удовлетворяет уравнению*

$$\lambda_{xy}(\lambda_{yyyy} - \lambda_{xxxx}) + 3(\lambda_{yyy}\lambda_{xyy} - \lambda_{xxy}\lambda_{xxx}) +$$

$$+2(\lambda_{yy}\lambda_{xyyy} - \lambda_{xx}\lambda_{xxxy}) + 4a_{22}\lambda_{xyyy} - 4a_{11}\lambda_{xxxy} + 2a_{12}(\lambda_{yyyy} - \lambda_{xxxx}) = 0, \tag{4}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} *— некоторые константы, определяемые метрикой и интегралом.*

Следующая теорема утверждает, что уравнение (4) эквивалентны системе (1).

Теорема 4 *Пусть* λ *— периодическое решение уравнения (4), удовлетворяющее условию* $\Delta\lambda + 2(a_{11} + a_{22}) > 0$*. Тогда соответствующее решение системы (1) также периодично.*

Уравнение (4) допускает следующую вариационную интерпретацию.

Теорема 5 *Уравнение (4) совпадает с уравнением Эйлера–Лагранжа функционала*

$$\mathcal{L}(\lambda) = \int \frac{1}{2} \left(4\lambda_{xy}(a_{22}\lambda_{yy} - a_{11}\lambda_{xx}) + 2a_{12}(\lambda_{yy}^2 - \lambda_{xx}^2) + \lambda_{xy}(\lambda_{yy}^2 - \lambda_{xx}^2) \right) dx\, dy$$

Этот функционал принимает особенно простой вид

$$\mathcal{L}(\lambda) = \int \frac{1}{2}\lambda_{xy}(\lambda_{yy} - \lambda_{xx})(\frac{1}{\varepsilon} + \Delta\lambda)dx\ dy,$$

если $a_{11} = a_{22} = \frac{1}{4\varepsilon}, a_{12} = 0$.

Рассмотрим уравнение (4) при $a_{12} = 0, a_{11} = a_{22} = \frac{1}{4\varepsilon}$

$$\lambda_{xxxy} - \lambda_{xyyy} = \varepsilon(\lambda_{xy}(\lambda_{yyyy} - \lambda_{xxxx}) + 3(\lambda_{yyy}\lambda_{xyy} - \lambda_{xxy}\lambda_{xxx}) +$$

$$+2(\lambda_{yy}\lambda_{xyyy} - \lambda_{xx}\lambda_{xxxy})) = 0. \tag{5}$$

Конформный множитель метрики имеет вид $\Lambda = \frac{1}{c_2}(\frac{\Delta\lambda}{2} + \frac{1}{2\varepsilon})$. Будем искать решение (5) в виде формального ряда по ε:

$$\lambda(x, y) = \lambda_0(x, y) + \lambda_1(x, y)\varepsilon + \lambda_2(x, y)\varepsilon^2 + \dots, \tag{6}$$

где ε — малый параметр. Тогда из (5) мы получаем рекурентную формулу

$$(\lambda_k)_{xyyy} - (\lambda_k)_{xxxy} = \sum_{s=0}^{k-1} < \lambda_s, \lambda_{k-s-1} >, \tag{7}$$

где $< \lambda_p, \lambda_q >= \lambda_{p_{xy}}(\lambda_{q_{yyyy}} - \lambda_{q_{xxxx}}) + 3(\lambda_{p_{yyy}}\lambda_{q_{xyy}} - \lambda_{p_{xxx}}\lambda_{q_{xxy}}) + 2(\lambda_{p_{yy}}\lambda_{q_{xyyy}} - \lambda_{p_{xx}}\lambda_{q_{xxxy}})$. Для двояко периодической функции λ_0 мы хотим найти все λ_k из (7). Легко видеть, что (7) имеет периодическое решение λ_k, если ряды Фурье в правой части не имеют мономов вида $e^{inx}, e^{iny}, e^{in(x+y)}, e^{in(x-y)}$. Отметим также, что периодическое решение λ_k уравнения (7) определяется с точностью до добавления к λ_k некоторых функций вида

$$\tilde{\lambda}_k = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x - y) + f_4(x + y).$$

Следующая теорема утверждает, что рекурсивный процесс хорошо определен и таким образом дает формальное периодическое решение (5).

Теорема 6 *Пусть*

$$\lambda_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(\cos(nx) + \cos(ny)) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(\cos(n(x - y)) + \cos(n(x + y))),$$

$$\tilde{\lambda}_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^k(\cos(nx) + \cos(ny)) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n^k(\cos(n(x - y)) + \cos(n(x + y))),$$

тогда рекурентная формула дает формальное периодическое решение (6) уравнения (7).

2.1 Собственные функции одномерного оператора Шредингера с полиномиальными потенциалами степени 3 и 4.

Одномерные операторы Шредингера с потенциалами третьей и четвертой степени возникают во многих областях математической физики. Мы указываем связь между собственными функциями таких операторов и собственными функциями обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга два (функциями Бейкера–Ахиезера ранга два).

Напомним, что если два обыкновенных дифференциальных оператора L_n, L_m порядков n и m коммутируют, то по лемме Бурхналла–Чаунди существует ненулевой полином $F(z,w)$ такой, что $F(L_n,L_m)=0$. Этот полином определяет *спектральную кривую* $\Gamma=\{(z,w):F(z,w)=0\}\subset\mathbb{C}^2$. Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа L_n и L_m, т.е. если $L_n\psi=z\psi, L_m\psi=w\psi$, то $(z,w)\in\Gamma$. Размерность пространства совместных собственных функций является делителем n и m (это число одно и тоже для общих $P=(z,w)\in\Gamma$). Наибольший общий делитель порядков всех операторов в максимальном коммутативном кольце, которое содержит L_n и L_m, называется *рангом*. Коммутативные кольца обыкновенных дифференциальных операторов классифицированы Кричевером. В случае ранга один собственные функции (функции Бейкера–Ахиезера) выражаются через тэта-функции многообразий Якоби спектральных кривых по формуле Кричевера. В случае ранга $l>1$ собственные функции не найдены явно. Это является основной сложностью при построении и исследовании таких операторов. Тем не менее сами операторы в некоторых случаях находятся. Кричевером и Новиковым найдены операторы ранга два отвечающие эллиптическим спектральным кривым. При $g=1$, $l=3$ операторы найдены Моховым. Нами ранее был предложен метод нахождения примеров операторов ранга два, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым рода $g>1$. В частности, нами доказано, что $L_4=(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2+\alpha_3g(g+1)x$ коммутирует с оператором L_{4g+2}. Операторы L_4, L_{4g+2} задают коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля. При $g=1$ эти операторы впервые появились у Диксмье. Оказывается, что собственные функции L_4 при $g=2,4$ в некоторых точках спектральных кривых связаны между собой и с функциями из ядра оператора $L_2=\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$.

Обозначим через φ решение уравнения $L_2\varphi = 0$.
Теорема 7 *1. Пусть $g = 2$, z — решение уравнения*

$$z^2 + 4\alpha_2 z + 12\alpha_1\alpha_3 = 0. \tag{8}$$

Тогда $L_4\psi = z\psi$, где $\psi = p\varphi, p(x) = 6\alpha_3 x + z + 4\alpha_2$.
2. Пусть $g = 4$, z — решение уравнения

$$z^3 + 20\alpha_2 z^2 + 16(4\alpha_2^2 + 13\alpha_1\alpha_3)z + 320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2) = 0. \tag{9}$$

Тогда $L_4\psi = z\psi$, где $\psi = p\varphi$, $p(x) = 280\alpha_3^2 x^2 + 20\alpha_3(z + 16\alpha_2)x + z^2 + 20\alpha_2 z + 64\alpha_2^2 + 168\alpha_1\alpha_3$.

При $g = 2, 4$ обозначим через l_4, l_{4g+2} операторы, которые получаются из L_4, L_{4g+2} сопряжением, т.е. $l_4 = p^{-1}L_4 p, l_{4g+2} = p^{-1}L_{4g+2}p$ (функция $p(x)$ указана в теореме 1).
Следствие. *При $g = 2, 4$ операторы l_4, l_{4g+2}, L_2 образуют коммутативное кольцо по модулю L_2, т.е.*

$$[l_4, L_2] = B_1 L_2, \quad [l_{4g+2}, L_2] = B_2 L_2, \tag{10}$$

где B_1, B_2 — некоторые операторы.

Можно показать, что при $\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_4^2 = 0$ оператор

$$L_4^a = (\partial_x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + 2g(g+1)x(\alpha_3 + 2\alpha_4 x) \tag{11}$$

коммутирует с оператором порядка $4g + 2$ (при $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$ первым это заметил В. Оганесян). Обозначим через φ решение уравнения $(\partial_x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\varphi = 0$.
Теорема 8 *1. Пусть $g = 1$, $z = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_4} - 4\alpha_2$. Тогда $L_4^a\psi = z\psi$, где $\psi = p\varphi, p(x) = 4\alpha_4 x + \alpha_3$.*
2. Пусть $g = 2$, z — решение уравнения

$$z^2 - \Big(\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_4} - 16\alpha_2\Big)z + 24\alpha_1\alpha_3 + 192\alpha_0\alpha_4 = 0. \tag{12}$$

Тогда $L_4^a\psi = z\psi$, где $\psi = p\varphi$, $p(x) = 24\alpha_4^2 x^2 + 12\alpha_3\alpha_4 x - 3\alpha_3^2 + \alpha_4(z + 16\alpha_2)$.

В. Давлетштна показала, что оператор $L_4^b = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)e^x$ коммутирует с оператором порядка $4g + 2$. Обозначим через φ решение уравнения $(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0 + \frac{1}{4}(g + \varepsilon)^2)\varphi = 0$.
Теорема 9 *1. Пусть $\varepsilon = 0$, тогда $L_4^b\psi = -\frac{1}{4}g^2(4\alpha_0 + g^2)\psi$, где $\psi = p\varphi$, $p(x) = e^{gx/2}$.*

2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $L_4^b\psi = -\frac{1}{4}(g+1)^2(4\alpha_0 + (g+1)^2)\psi$, где $\psi = p\varphi$, $p(x) = e^{-(g+1)x/2}$.

Замечание *Решения уравнения $(\partial_x^2+\alpha_1 e^x+\alpha_0)\varphi = 0$ выражаются через функцию Бесселя, а именно, замена переменной $x = \ln\left(\frac{y^2}{4\alpha_1}\right)$ сводит это уравнение к $(y^2\partial_y^2 + y\partial_y + (y^2+4\alpha_0))\varphi = 0$.*

1.3 Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами и автоморфизмы первой алгебры Вейля.

Коммутирующие операторы ранга два, отвечающие спектральной кривой рода $g = 1$ (операторы Кричевера–Новикова) имеют вид

$$L_{KN} = \left(\partial_x^2+u\right)^2 + 2c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1))\partial_x + (c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1)))_x - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1),$$

где $\gamma_1(x) = \gamma_0 + c(x),\ \gamma_2(x) = \gamma_0 - c(x)$,

$$u(x) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{1}{4}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2} + 2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_x - \frac{c_{xxx}}{2c_x} + c_x^2(\Phi(\gamma_0+c,\gamma_0-c) - \Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2) = \zeta(\gamma_2-\gamma_1) + \zeta(\gamma_1) - \zeta(\gamma_2),$$

$\zeta(z), \wp(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольный функциональный параметр, γ_0 — некоторая константа. Оператор порядка 6 $\tilde{L}_{KN}$, коммутирующий с L_{KN}, может быть найден из тождества $\tilde{L}_{KN}^2 = 4L_{KN}^3 + g_2 L_{KN} + g_3$. Диксмье построил первый пример коммутативной подалгебры в алгебре Вейля A_1. Алгебра Вейля A_1 — это алгебра обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами: $A_1 = \mathbb{C}[x][\partial_x]$. Коммутативная подалгебра Диксмье порождается операторами

$$L_D = (\partial_x^2 + x^3 + h)^2 + 2x,\ h \in \mathbb{C},$$

$$\tilde{L}_D = \left(\partial_x^2 + x^3 + h\right)^3 + \frac{3}{2}\left(x\left(\partial_x^2 + x^3 + h\right) + \left(\partial_x^2 + x^3 + h\right)x\right).$$

Нами показано, что среди операторов L_{KN} существуют бесконечно много операторов с полиномиальными коэффициентами.

Теорема 10 *Для любого натурального n и любой эллиптической кривой Γ, заданной уравнением $w^2 = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$, существуют*

$$V_n(x) = \alpha_{n+2}x^{n+2} + \ldots + \alpha_0, \quad W_n(x) = \beta_n x^n + \ldots + \beta_0,$$

где $\alpha_{n+2} \neq 0$, $\beta_n \neq 0$, такие, что $L_{4,n} = (\partial_x^2 + V_n(x))^2 + W_n(x)$ коммутирует с оператором шестого порядка $L_{6,n}$. Спектральная кривая пары $L_{4,n}, L_{6,n}$ совпадает с Γ.

Алгебра A_1 допускает автоморфизмы $\varphi_j : A_1 \to A_1$

$$\varphi_1(x) = x + f(\partial_x),\ \varphi_1(\partial_x) = \partial_x,$$

$$\varphi_2(x) = x,\ \varphi_2(\partial_x) = \partial_x + g(x),$$

$$\varphi_3(x) = \alpha x + \beta\partial_x,\ \varphi_3(\partial_x) = \gamma x + \delta\partial_x,\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

где f, g — некоторые полиномы. Диксмье доказал, что любой автоморфизм A_1 является композицией автоморфизмов вида $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, т.е. любой автоморфизм является ручным.

Теорема 11 *При $n_1 \neq n_2$ не существует автоморфизма первой алгебры Вейля, который переводит L_{4,n_1} в L_{4,n_2}.*

Очевидно, что группа $Aut(A_1)$ сохраняет пространство всех решений уравнения

$$Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0,\ X, Y \in A_1.$$

Возникает естественный вопрос: как устроено множество орбит действия $Aut(A_1)$ на пространстве решений этого уравнения? Ю.Берест высказал гипотезу, что это множество бесконечно в случае спектральных кривых рода $g = 1$ и конечно в случае спектральных кривых рода $g > 1$. Мы доказываем эту гипотезу при $g = 1$.

Теорема 12 *Множество орбит действия $Aut(A_1)$ на пространстве решений уравнения $Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, X, Y \in A_1$ бесконечно.*

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. A.E. Mironov. *Self-adjoint commuting ordinary differential operators.* Inventiones mathematicae. 2014. Vol. 197, No. 2. P. 417–431.

2. A.E. Mironov. *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, V. 234, 2014, P. 309-322.

3. M. Bialy, A. Mironov. *Integrable geodesic flows on 2-torus: Formal solutions and variational principle.* Journal of Geometry and Physics. 2015. (published online http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.08.006).

4. А.Е. Миронов, Б.Т. Сапарбаева. *О собственных функциях одномерного оператора Шредингера с полиномиальным потенциалом.* Доклады АН. 2015 (принята к печати).

5. А.Б. Жеглов, А.Е.Миронов. *О коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода один.* Доклады АН. 2015 (принята к печати).

6. Г.С. Маулешова, А.Е. Миронов, *О коммутирующих разностных операторах ранга два*, представлена В.М. Бухштабером в Успехи матем. наук в раздел "Сообщения ММО".

7. G.S. Mauleshova, A.E. Mironov. *Difference Krichever–Novikov operators*, arXiv:1408.0113.

3. Участие в конференциях и школах (приглашенные доклады)

1. International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2014, 16-27 June, Trieste , Italy.

2. International Conference on Algebraic Methods in Dynamical Systems (AMDS 2014), Barranquilla, Colombia from October 5-11, 2014.

3. Геометрия, Топология и интегрируемость Москва, Сколково, 20-25 октября.

4. 18th Geometrical Seminar, Vrnjacka Banja, Serbia, May 25–28, 2014

5. 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjacka Banja, Serbia on May 22–25, 2014.

6. The 3rd summer school on geometry of differential equations, September 8-12, 2014 organized by Mathematical Institute in Opava (Czech Republic) (приглашенный лектор, 10 лекций).

4. Работа в научных центрах и международных группах

1. Tel-Aviv University.

2. Mathematical Institute in Opava (Czech Republic).

5. Педагогическая деятельность

Спецкурс "Интегрируемые гамильтоновы системы", Новосибирский государственный университет.

Научное руководство.

Магистранты: М. Зайнуллина, Л. Урынбаева.

Аспиранты: С. Агапов, В. Давлетшина, Г. Маулешева, Б. Сапарбаева.

Краткое подведение итогов за три года

В 2012–2014 годах опубликовано 9 статей, в добавление к этому 3 статьи приняты к печати (они выйдут в 2015) и 2 статьи сданы в журналы. Таким образом всего 14 работ.

Часть задач, заявленных в проекте, решены полностью. По остальным задачам достигнут значительный прогресс.

Наиболее важными, на наш взгляд, являются результаты о коммутирующих дифференциальных и разностных операторах ранга два, а также результаты об интегрируемых геодезических потоках на двумерном торе. Часть этих результатов опубликована в следующих работах.

1. A.E. Mironov. *Self-adjoint commuting ordinary differential operators.* Inventiones mathematicae. 2014. Vol. 197, No. 2. P. 417–431.

2. G.S. Mauleshova, A.E. Mironov. *Difference Krichever–Novikov operators*, arXiv:1408.0113.

3. M. Bialy, A. Mironov. *Integrable geodesic flows on 2-torus: Formal solutions and variational principle.* Journal of Geometry and Physics. 2015. (published online http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.08.006).