

**Итоговый отчет участника гранта “Династия”
Медных Ильи Александровича
за 2012 – 2014 годы.**

Отчет за 2014 год

1. Результаты, полученные в этом году:

- 1.1. Проводя аналогию с теорией римановых поверхностей, определим род графа как ранг его первой группы гомологий. Инволюция τ , действующая на графе X , называется γ -гиперэллиптической если $X/\langle \tau \rangle$ - граф рода γ . Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы инволюция τ , действующая на графе X рода g , была γ -гиперэллиптической. В частности, таковым условием является равенство $\text{tr } \tau = 2\gamma - g$, где $\text{tr } \tau$ это след τ в первой группе гомологий $H_1(X)$.
- 1.2. Классическая теорема Гурвица утверждает, что порядок группы конформных автоморфизмов римановой поверхности рода $g \geq 2$ ограничена величиной $84(g-1)$. В 1956 году Котаро Оикава показал, что если при этом группа автоморфизмов оставляет инвариантным непустое множество из s элементов, то указанная оценка может быть заменена на $12(g-1) + 6s$. Дискретный аналог теоремы Гурвица был установлен Скоттом Корри в 2011. Он показал, что если конечная группа автоморфизмов действует на графе рода $g \geq 2$ без неподвижных полуребер, то её порядок ограничен сверху величиной $6(g-1)$. Нами показано, что если при этом группа автоморфизмов оставляет инвариантным множество вершин из $s \geq 1$ элементов, то её порядок не превосходит $2(g-1) + 2s$.
- 1.3. В 2000 году Тацуя Аракава получил оценку на порядок группы конформных автоморфизмов, оставляющих инвариантными 2 или 3 непересекающихся множества, на римановой поверхности заданного рода. Установлена дискретная версия указанной теоремы для графов.

2. Опубликованные и принятые в печать работы:

- 2.1. Медных И.А., Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два // Математические заметки, 2014., Т. 96, №1, С. 69–81.
- 2.2. Madina Deryagina and Ilya Mednykh, “On the Jacobian Group for Moebius Ladder Graph and Prism Graph”, Fifteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization June 7–12, 2013, Varna, Bulgaria Ivailo M. Mladenov, Andrei Ludu and Akira Yoshioka, Editors Avangard Prima, Sofia 2014, P. 117–126. (doi: 10.7546/giq-15-2014-1-10)
- 2.3. Принята в печать совместная статья A. D. Mednykh, I. A. Mednykh, “On Wiman's theorem for graphs”, Discrete Mathematics, 2014.
- 2.4. Принята в печать совместная статья А.Д. Медных, И.А. Медных, Р. Неделея, “О некоторых обобщениях теоремы Гурвица для групп, действующих на графе”, Доклады Академии Наук, 2015, Т. 460, № 5.

Тезисы конференций:

- 2.5. Mednykh I.A. On isospectrality of genus two graphs // Algebraic, Topological and Complexity Aspects of Graph Covers and Winter School in Harmonic Functions on

Graphs and Combinatorial Designs. January 20 - 24, 2014, Sepetn`a, Czech Republic. Proceedings. MATFYZPRESS, Publishing House of the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, 2014, -P. 15.

- 2.6. Mednykh I.A. On isospectrality of genus two graphs // Graphs and Groups, Cycles and Coverings. Novosibirsk, Russia, September 23–26, 2014. Abstract of the Russian-Slovenian Workshop. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2014, -P. 19.

3. Участие в конференциях и школах:

- 3.1. International conference “Algebraic, Topological and Complexity Aspects of Graph Covers”, January 20–24, 2014, Sepetna, Czech Republic. Приглашенный доклад.
- 3.2. Russian-Slovenian Workshop “Graphs and Groups, Cycles and Coverings”, September 23–26, 2014, Novosibirsk, Russia. Секционный доклад.
- 3.3. International workshop on multidimensional complex analysis and differential equations, October 20-23, 2014, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia. Секционный доклад.

4. Работа в научных центрах и международных группах:

- 4.1. Член международной группы “Лаборатория квантовой топологии” при Челябинском государственном университете, руководитель – профессор В.Г. Тураев, США.
- 4.2. Член международной группы “ Лаборатория комплексного анализа и дифференциальных уравнений ” при Сибирском федеральном университете, руководитель – профессор Ари Лаптев, Швеция.
- 4.3. Участник Словенско-Российского проекта по теории вложенных графов. Руководитель – профессор Томо Писанский, Словения.

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство):

- 5.1. 2-ой семестр 2013-2014 года обучения (семинары по ТФКП в Новосибирском Государственном университете, Мех.-мат. факультет, 2 группы)
- 5.2. 1-ый семестр 2014-2015 года обучения (семинар по ТФКП в Новосибирском Государственном университете, Мех.-мат. факультет, 2 группы)
- 5.3. Выступал в качестве рецензента по бакалаврской диссертации Ухаровой Елены Сергеевны, Новосибирский государственный университет, 2014 г..

Общая аналитическая сводка результатов за 2012-2014 годы

6.1. В настоящем проекте предполагается получить описание всех голоморфных отображений одной гиперэллиптической римановой поверхности на другую. Частные результаты о классификации голоморфных отображений гиперэллиптических римановых поверхностей получены в недавних работах. Будут получены верхние оценки на число таких отображений и исследован вопрос об их точности.

В ранних работах автора установлена точная верхняя оценка на число голоморфных отображений гиперэллиптической римановой поверхности рода 3 на поверхность рода 2. Получено явное описание пар римановых поверхностей, для которых данная оценка достигается. Там же было установлено, что число классов эквивалентности голоморфных отображений между указанными поверхностями не превосходит двух. В процессе выполнения проекта были описаны все пары римановых поверхностей, между которыми существуют ровно два класса эквивалентности голоморфных отображений.

Получены следующие результаты. Предположим, что множество голоморфных отображений $\text{Hom}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности. Тогда:

- (1) обе римановы поверхности S_3 и S_2 вещественны, то есть обладают антиконформными инволюциями.
- (2) если отображения f и g из $\text{Hom}(S_3, S_2)$ неэквивалентны, то существуют антиконформный автоморфизм α римановой поверхности S_3 и антиконформный автоморфизм β римановой поверхности S_2 такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$.
- (3) с точностью до конформной эквивалентности существует ровно три пары римановых поверхностей (S_3, S_2) для которых множество $\text{Hom}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

Во всех случаях указан явный вид алгебраических уравнений для соответствующих римановых поверхностей. Полученные результаты готовятся к печати.

6.2. В проекте предполагается получить аналоги теорем Акколы и Фаркаша два для графов. Будут также установлены дискретные аналоги теоремы де Франкиса.

В представленной в отчете работе [Медных И.А., Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два // Математические заметки, 2014, Т. 96, №1, С. 69–81] установлены дискретные версии теорем Акколы и Фаркаша о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два. В принятой к печати работе [A. D. Mednykh, I. A. Mednykh, "On Wiman's theorem for graphs", Discrete Mathematics, 2014] получена дискретная версия классической теоремы А. Вимана, устанавливающая точную верхнюю оценку на порядок циклической группы, действующей гармонично на графе рода $g \geq 2$. Кроме того, в совместной работе [А.Д. Медных, И.А. Медных, Р. Неделея, "О некоторых обобщениях теоремы Гурвица для групп, действующих на графе", Доклады Академии Наук, 2015, Т. 460, № 5] найдены дискретные аналоги теорем К. Ойкавы (1956) и Т. Аракава (2000), устанавливающих верхние оценки на порядок групп, оставляющих инвариантными множества заданной мощности.

6.3. В данном проекте планируется продолжить исследование строения групп якобиана для важных бесконечных семейств графов, таких как призмы, дискретные торы и другие.

Кроме того, предполагается установить связь между рангом якобиана и максимальной кратностью собственных чисел оператора Лапласа на графе. По гипотезе, высказанной Д. Дж. Лоренцини, они отличаются не более чем на единицу.

Из результатов работы [Jacobson B., Niedermaier A., Reiner V. Critical groups for complete multipartite graphs and Cartesian products of complete graphs // Journal of Graph Theory. – 2003. Т. 44. №. 3. С. 231-250], а также из предыдущих работ И.А. Медных, М.А. Дерягиной (Зиндиновой) следует, что гипотеза верна полного k -дольного графа K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , где $n_1 = n_2 = \dots = n_k = m$ и $k \geq 2$, призматического графа P_n и графа Мёбиусова лестница M_n . В то же время, она оказывается несправедливой для полного k -дольного графа K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , где все n_i различны и удовлетворяют условию $n_1 | n_2, n_2 | n_3, \dots, n_{k-1} | n_k$.

В процессе выполнения проекта были развиты новые методы, позволяющие вычислять якобианы для широкого класса циркулянтных графов, в этот список, а частности, входят бесконечные семейства упомянутых выше графов. Соответствующие результаты опубликованы в работах, включенных в отчет.