# ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2012 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

## 1. Научные публикации

В работе [1] изучается такой вопрос: рассмотрим $d$-мерный куб $Q$, поделённый на $n^d$ маленьких кубиков стандартным образом. Далее куб красится в $m+1$ цвет по кубикам и мы хотим доказать нижнюю оценку на размер связного одноцветного подмножества. Для $m = d-1$ (то есть $d$ цветов) широко известно (теорема Лебега), что какое-то одноцветное множество соединяет две противоположные гиперграни $Q$, давая таким образом оценку снизу $n$ для размера компоненты. Для $m = 1$ (2 цвета) Матушек и Прживетивый доказали оценку снизу приблизительно $n^{d-1}$. С помощью метода М. Громова «стягивания в пространстве циклов» удаётся доказать оценку снизу $f(d,m)n^{d-m}$ с некоторым, видимо неоптимальным, коэффициентом $f(d,m)$, но правильной степенью $d-m$. Независимо аналогичная, и даже несколько более сильная, теорема была доказана другим способом студентом второго курса математического факультета ВШЭ Марселем Матдиновым, см. [2].

Теорема Каратеодори утверждает, что точка $x$ принадлежит выпуклой оболочке множества $X$ в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она принадлежит выпуклой оболочке некоторого подмножества $X$ из не более чем $n+1$ элементов. Известны также случаи, когда константа $n+1$ может быть уменьшена. Например, теорема Фенхеля утверждает, что эта константа не более $n$ для компакта $X$, компоненты которого нельзя отделить друг от друга гиперплоскостью. В работе [3] мы рассматриваем несколько результатов, напоминающих теорему Фенхеля. Также мы доказываем соответствующие аналоги цветной теоремы Каратеодори и приводим одну теорему типа Тверберга для семейств выпуклых компактов.

В работе [4] мы изучаем возможность отрезать от некоторых $d+1$ мер в $\mathbb{R}^d$ одну и ту же долю. Первый частный случай — это отрезание гиперплоскостью одной и той же (не известной заранее) доли от мер. Это не всегда возможно, но мы даём одно достаточное условие в терминах геометрических перестановок, порождаемых набором мер. Другой случай — это отрезать заданную долю $\alpha$ от каждой меры выпуклым множеством. Мы доказываем, что без других предположений это возможно только при $\alpha$ вида $1/m$ с натуральным $m$ и невозможно при других $\alpha$.

Теорема о центральной точке утверждает, что для конечного множества $X$ в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать точку $c$ так, что всякое полупространство, содержащее $c$, обязательно содержит не менее $1/(d+1)$ от точек $X$. В одной из моих предыдущих статей была приведена «двойственная» теорема о центральной точке: для конечного набора $X$ гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ общего положения можно выбрать точку $c$ так, что всякий луч с началом в этой точке пересекает не менее $1/(d+1)$ элементов $X$. Эта теорема не следует из исходной теоремы о центральной точке через проективную двойственность. Читатель может проверить, что после двойственности получается другое утверждение. Беньямин Мачке предложил вариант теоремы, который интерполирует между исходной и «двойственной» теоремами о центральной точке. Основная идея заключается в том, что для подпространства $V$ в $\mathbb{R}P^d$ надо найти подпространство $W$ дополнительной размерности $d - \dim V - 1$ так, что всякая пара гиперплоскостей

$H$ и $J$, содержащих $V$ и $W$ соответственно, не отрезает слишком мало от данного конечного множества $X$. Здесь важно, что пара гиперплоскостей делит проективное пространство на две части. Таким образом, в работе [5] мы доказываем проективную теорему о центральной точке, а также соответствующий аналог теоремы Тверберга. Мы даже доказываем более общую теорему, которая также включает теорему Тверберга о трансверсали как частный случай. Потом мы доказываем пару аналогичных утверждений, полученный некоторой перестановкой кванторов в исходных теоремах.

В работе [6] мы с соавторами опять используем некоторый вариант метода Громова «стягивания в пространстве циклов», применяя его к классическим теоремам Борсука–Улама и Хопфа (о совпадении образов у пары точек). Применение оказывается успешным и позволяет обобщить эти классические теоремы. В этом случае метод Громова имеет наглядную геометрическую интерпретацию, по сравнению с общим случаем, использующим симплициальные множества. Используя полученные топологические результаты, мы исследуем аналоги поперечников Урысона и Громова для метрических пространств и доказываем некоторые результаты про поперечники. Однако, в области изучения поперечников эти методы дают лишь очень частные случаи и остаётся много открытых вопросов.

Текущая информация о моих публикациях доступна также на сайте www.rkarasev.ru.

## 2. Преподавательская деятельность

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. В этом году начал читать спецкурс «Геометрия мер, разбиения и выпуклые тела».

Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в олимпиаде IMC 2012 в г. Благоевград, Болгария и заняла первое место.

## Список литературы


[1] R.N. Karasev. An analogue of Gromov's waist theorem for coloring the cube. // arXiv:1109.1078, (2011).

[2] M. Matdinov. Size of components of a cube coloring. // arXiv:1111.3911, (2011).

[3] I. Bárány, R.N. Karasev. Notes about the Carathe'odory number. // Discrete and Computational Geometry 48:3 (2012), 783–792.

[4] A.V. Akopyan, R.N. Karasev. Cutting the same fraction of several measures. // arXiv:1203.5591, (2012).

[5] R.N. Karasev, B. Matschke. Projective center point and Tverberg theorems. // arXiv:1207.2204, (2012).

[6] A.V. Akopyan, R.N. Karasev, A.Yu. Volovikov. Borsuk-Ulam type theorems for metric spaces. // arXiv:1209.1249, (2012).