Отчет за 2012 год

А. И. Эстеров

1 Результаты

Дискриминанты многочленов многих переменных. Дискриминант многочлена f многих переменных данной степени с общими коэффициентами – многочлен от этих коэффициентов, обращающийся в ноль, когда гиперповерхность $f = 0$ имеет особенности. Он изучается начиная с Кэли и Маколея. Гельфанд, Капранов и Зелевинский обобщили это понятие на случай, когда f – линейная комбинация произвольного конечного набора мономов с общими коэффициентами. Это обобщение нашло приложения в области многомерных гипергеометрических систем, проективной двойственности и т. д.

В 2012 году это понятие было обобщено со случая одного уравнения на случай системы уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$. Проблема состояла в том, что прямолинейное обобщение неудовлетворительно: при $k > 1$ многообразие систем уравнений, составленных из данного набора мономов и имеющих особое множество решений, не играет той роли, ради которой изучалось при $k = 1$. Например, даже классический вопрос о степени дискриминанта не имеет смысла для этого многообразия, так как оно, вообще говоря, может состоять из компонент разных размерностей.

Оказалось, что “правильное” обобщение дискриминанта получается, если относить к дискриминанту также и те системы уравнений, множество решений которых имеет особенность на бесконечности. Более точно, назовем систему полиномиальных уравнений типичной, если топология множества ее решений не меняется при шевелении ее (ненулевых) коэффициентов, и назовем дискриминантом множество всех нетипичных систем, составленных из данного набора мономов. Доказано, что получившиеся множество – всегда гиперповерхность, получены формулы для уравнения этой гиперповерхности и его степени.

Этот объект оказался интересен во многих отношениях. Например, доказательство чистоты размерности дискриминанта системы уравнений сводится к похожему факту тропической геометрии: граница пересечения тропического веера с внутренностью многогранника – множество чистой размерности, на 1 меньшей, чем размерность веера. Эта связь приводит к новым фактам и открытым вопросам о геометрии тропических вееров и комбинаторике многогранников. Также свойства дискриминанта системы уравнений позволяют, например, доказывать утверждения о топологии полиномиальных отображений: у общего полиномиального отображения комплексного тора почти все слои, отличающиеся от слоя общего положения топологией, отличаются от него даже эйлеровой характеристикой. Этот факт был ранее известен только для отображений с одномерным образом или одномерным слоем.

Также совместно с Кийоши Такеучи продолжается изучение вырожденных гипергеометрических систем, обобщающих системы Гельфанда-Капранова-Зелевинского: в 2012 году для их решений получены интегральные представления, обобщающие классические интегральные представления функций Эйри и Бесселя.

Коразмерность дискриминантов и многогранники малого смешанного объема. Чтобы изучать коразмерности дискриминантов и стратов большей коразмерности в пространстве систем полиномиальных уравнений, составленных из данного набора мономов, полезно знать классификацию наборов целочисленных многогранников малого смешанного объема. Напомним, что смешанный обеъм – это единственная симметричная функция от n многогранников в $\mathbb{R}^n$, линейная в смысле поточечного сложения многогранников и равная на наборе n копий одного многогранника объему этого многогранника. Смешанный объем многогранников с вершинами в $\mathbb{Z}^n$ кратен $1/n!$. Задача характеризации наборов многогранников нулевого смешанного объема была решена уже в исходной работе Минковского о смешанных объемах.

В 2012 году совместно с Глебом Гусевым описаны все наборы n целочисленных многогранников, имеющие смешанный объем $1/n!$. Согласно формуле Кушниренко-Бернштейна, это равносильно классификации систем n полиномиальных уравнений с общими коэффициентами, имеющих одно решение. Полученная классификация означает, что любая такая система после подходящей мономиальной замены переменных содержит k линейных уравнений от k переменных, причем, вычислив эти k переменных и подставив в остальные уравнения, вновь получим систему $n - k$ уравнений с общими коэффициентами и одним решением.

Геометрия общих систем уравнений, составленных из данного набора мономов. Матрица размера $m \times k$, составленная из многочленов общего положения данных степеней от переменных $x_1, \ldots, x_n$, при $n = |m-k|+1$ вырождается в конечном числе точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. В 2012 году вычислено количество точек вырождения (раньше ответ был известен только для случая, когда все многочлены в каждой строке матрицы имеют одну и ту же степень).

2 Публикации

A. Esterov, *Multiplicities of degenerations of matrices and mixed volumes of Cayley polyhedra*, Journal of Singularities 6(2012) 27–36
A. Esterov, *Tropical varieties with polynomial weights and corner loci of piecewise polynomials*, Moscow Mathematical Journal 12(2012), 1, 55–76
A. Esterov, K. Takeuchi, *Motivic Milnor fibers over complete intersection varieties and their virtual Betti numbers*, International Mathematics Research Notes, 15(2012), 3567-3613
A. Esterov, K. Takeuchi, *Confluent A-hypergeometric functions and rapid decay homology cycles*, arXiv:1107.0402v4
A. Esterov, G. Gusev, *Systems of equations with a single solution*, arXiv:1211.6763
A. Esterov, *Discriminant of system of equations*, arXiv:1110.4060v2

3 Преподавание

НМУ, курс *"Тропическая геометрия и многогранники Ньютона"*, 1 семестр
ВШЭ, курс *"Динамические системы"*, 1 семестр
ВШЭ, научно-учебный семинар *"Выпуклая геометрия"*, 1 год (с В. А. Кириченко и Е. Ю. Смирновым)

4 Доклады

По материалам работы "Discriminant of system of equations":
Конференция "Алгебра и геометрия" (Хованский– 60), ВШЭ, НМУ
Конференция "Тропическая и идемпотентная математика", НМУ, ИППИ
Московское Математическое Общество
Семинар отдела дифференциальных уравнений МИАН