

# Асимптотический анализ возмущённых эллиптических краевых задач

Борисов Денис Иванович

Конкурс фонда "Династия" для молодых математиков

Программа 2, подпрограмма 2.2, отчет за 2014 г.

## 1 Основные полученные результаты

В 2014 г. я занимался исследованиями в разных областях математики. Первое из них – изучение задачи об эллиптическом операторе в бесконечной полосе с мелкой и частой перфорацией вдоль заданной кривой. Эта задача уже решалась в 2013 г., по результатам рецензирования было принято решение о переработке статьи. В итоге удалось серьезно усилить ранее полученные результаты. Анонс результатов был опубликован в статье [3]; полная версия [7] пока находится на рецензировании.

Следующее направление – изучение  $\mathcal{PT}$ -симметричных моделей. Результаты в задаче о  $\mathcal{PT}$ -симметричном дифференциальном операторе второго порядка в тонком многомерном слое, описанные в отчете за 2013 г., были опубликованы в статье [5]. Модель  $\mathcal{PT}$ -симметричного волновода, но уже конечной ширины рассматривалась в [4]. Ранее в работе D. Krejcirik and M. Tater, "Non-Hermitian spectral effects in a  $\mathcal{PT}$ -symmetric waveguide", J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 244013 на численном уровне для такой модели наблюдался эффект, когда пара комплексно сопряженных собственных значений при подходе к вещественной оси переходит в пару вещественных собственных значений, либо наоборот, пара вещественных собственных значений при слиянии переходит в пару комплексно сопряженных собственных значений. В [4] было дано аналитическое описание данного эффекта. Было показано, что подобный эффект происходит при вещественного собственного значения, у которого алгебраическая кратность равна двум, а геометрическая – один. Для собственных значений, в которые расщепляется такое двукратное собственное значение, получены полные асимптотические разложения по малому параметру, описывающему возмущение, и показано, что данные ряды голоморфны по корню из малого параметра.

В [2] рассматривалось нелинейное уравнение синус-Гордона с  $\mathcal{PT}$ -симметричным возмущением. Возмущение описывалось производной по времени, умноженной на нечетную по пространственной переменной функцию. Сама функция была экспоненциально убывающей. Данное возмущение соответствует вязкому члену со специальными свойствами. Нечетность возмущения по пространственной переменной означало, что рассматриваемая физическая система сбалансирована – приток и отток энергии взаимно уравновешены. При отсутствии возмущения такое уравнение имеет явное решение – кинк. Добавление возмущения деформирует это решение; основной целью было изучение взаимодействия предельного кинка и возмущения. Оказалось, что в зависимости от локализации исходного кинка при возмущении решение может пройти  $\mathcal{PT}$ -симметричный дефект, описываемый правой частью, либо не пройти. В случае прохождения дефекта решения испытывает сдвиг фазы. Эти результаты были получены на уровне численных экспериментов. Основной же аналитический результат – аналитическая формула для сдвига фазы.

Изучалась задача о паре трехмерных квантовых волноводов, соединенных окном. Волноводы моделировались описывались парой бесконечных плоскопараллельных слоев с общей границей, на которой прорезалось отверстие – окно. В качестве оператора выбирался магнитный оператор Шредингера с потенциалом и краевым условием Дирихле. Предполагалось, что магнитный и электрический потенциалы финитны. Рассматривалось возмущение края существенного спектра при увеличении размеров окна. А именно, предполагалось, что для заданных потенциалов и окна краю существенного спектра соответствует некоторый набор нетривиальных решений рассматриваемой краевой задачи для описанного выше

оператора. Относительно решений предполагалось, что среди них имеется одно с логарифмическим ростом на бесконечности, а остальные убывают, часть из последних может быть собственными функциями. Было показано, что в таком случае малое изменение заданной формы окна при определенных условиях приводит к возникновению из края существенного спектра связанных состояний, антисвязанных состояний и резонансов. При этом каждая резонансная убывающая собственная функция порождает либо пару связанное состояние – антисвязанное состояние, либо пару резонансов. Были получены условия, позволяющие определить какой именно случай реализуется. Для соответствующих спектральных значений были получены первые члены асимптотик. Полученные результаты будут опубликованы в декабрьском номере журнала “Проблемы математического анализа”, см. [1].

Совместно с немецким и итальянским коллегами (Ivan Veselić, F. Hoescker-Escuti, Технический университет г. Кемниц) ведутся исследования в области случайных гамильтонианов. В первом совместном проекте исследуется вопрос о сдвиге нижнего края спектра заданного оператора при добавлении к нему малого случайного возмущения. Эта задача полностью решена для дискретных операторов. Удалось получить условия, гарантирующие сдвиг вниз края существенного спектра. Для этого сдвига получены асимптотические оценки. Результаты этой работы описаны в статье [8]. Дальнейшие усилия будут направлены на решение аналогичной задачи в непрерывном случае. На данный момент общая схема решения задачи выработана, работа идёт над отдельными деталями, обсуждением примеров и написанием окончательного текста статьи.

Второй проект (совместно с I. Veselić’ем и А.М. Головиной) посвящён получению оценок начальных масштабов для максимально широкого класса случайных возмущений, когда последние малы, что соответствует умножению возмущения на малый параметр. Оценки начальных масштабов важны с точки зрения доказательства локализации Андерсона многомасштабным методом; они являются базой индукции в доказательстве. Нашей целью является определение условий общего характера на возмущения, при которых можно доказать оценки начальных масштабов на нижней части спектра. Общая схема решения этой задачи также отработана, в настоящее время идёт работа над реализацией различных деталей, также обсуждаются различные примеры, призванные подчеркнуть общность результатов. В работу над этим проектом вовлечена и моя бывшая аспирантка А.М. Головина.

Совместно с португальским коллегой (Pedro Freitas, Университет г. Лиссабона) в 2013 г. была исследована задача о первом собственном значении оператора Лапласа-Бельтрами на поверхности вращения, из которого вырезано большое либо малое отверстие. По результатам работы была подготовлена статья [9], которая в настоящий момент находится на рассмотрении.

## 2 Итоги выполнения заявленного проекта

Заявка на конкурс фонда “Династия”, поданная мною в октябре 2011 г., выполнена полностью, за исключением лишь одной задачи – доказательство равномерной резольвентной сходимости и получение оценок скорости сходимости для модели волновода с концентрированными массами на границе. Причина в том, что в этом направлении вначале следовало решить аналогичные вопросы для задач с частой сменой краевых условий, с быстро осциллирующей границей и с мелкой перфорацией вдоль заданной кривой. Все эти задачи были успешно решены и соответствующие статьи были опубликованы, за исключением последней работы [7], которая пока находится на рецензировании. Задача же о концентрированных массах существенно более сложная, так как имеются определенные качественные отличия в поведении резольвенты возмущённого оператора. Эти отличия удалось выявить уже при анализе случая легких масс – наиболее простом случае. Отметим также, что этот случай на сегодняшний день исследован, но не оформлен в виде публикации по описанной выше причине задержки публикации предыдущих работ по этой тематике. Полное решение задачи о концентрированных массах планируется получить в 2015-2016 гг., в этот же период планируется и написать соответствующую статью. Хотелось бы также подчеркнуть, что все остальные исследования, описанные в заявке 2011 г., успешно проведены в 2012-2014 гг. И помимо них мною успешно проводились исследования и в других направлениях, см.,

например, отчет за прошлый год и описанные выше результаты этого года.

### 3 Список публикаций

Опубликованные:

1. Д. Борисов. Возмущение края существенного спектра волновода с окном. I. Убывающие резонансные решения // Проблемы математического анализа. 2014, принято к печати.
2. D. Saadatmand, S.V. Dmitriev, D. Borisov, P.G. Kevrekidis. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // Physical Review E. 2014. V. 90. No. 5. id. 052902 (10 pp).
3. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. Norm resolvent convergence for elliptic operators in domain with perforation along curve // Comptes Rendus Mathematique. 2014. V. 352. No. 9. P. 679-683.
4. D. Borisov. Eigenvalues collision for  $\mathcal{PT}$ -symmetric waveguide // Acta Polytechnica. 2014. V. 54. No. 2. P. 93-100.
5. Д. Борисов. Дискретный спектр тонкого  $\mathcal{PT}$ -симметричного волновода // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 30-58.

Принятые к печати:

6. D. Borisov. On band spectrum of Schroedinger operator in periodic system of domains coupled by small windows // Russian Journal of Mathematical Physics, to appear.

Направленные в печать:

7. D. Borisov, G. Cardone, T. Durante. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // submitted.
8. D. Borisov, F. Hoecker-Escuti, I. Veselić. Expansion of the almost sure spectrum in the weak disorder regime // submitted.
9. D. Borisov, P. Freitas. The spectrum of geodesic balls on spherically symmetric manifolds // submitted.

### 4 Конференции

1. The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, August 22-29, 2014.
2. Международная конференция “Нелинейные уравнения и комплексный анализ”, посвящённая памяти академика Ильина Арлен Михайловича, оз. Банное, 17-21 марта 2014 г.

### 5 Педагогическая деятельность

Работаю профессором кафедры математики и статистики Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. В БГПУ им. М. Акмуллы в 2013/2014 учебном году читал лекции и вёл практические занятия по курсам “Математический анализ”, “Теория функций действительного переменного”, “Уравнения математической физики”. В текущем учебном году читаю лекции и веду практические занятия по курсам “Уравнения математической физики”, “Вариационное исчисление”.

20 сентября 2013 г. под моим руководством была успешно защищена кандидатская диссертация моей аспиранткой Головиной Анастасией Михайловной на тему “Резольвенты и спектры периодических операторов с разбегающимися возмущениями” по специальности 01.01.02. В 2014 г. её работа была отмечена Медалью РАН с премией для молодых ученых в области математики. Она также заняла второе место в Конкурсе Мёбиуса 2013 г.

Руководжу одним аспирантом 2-го года обучения (Шарапов Тимур Фархатович) и магистрантом 1-го курса (Каримов Рамис Хамитович). Шарапов Т.Ф. в этом году стал финалистом конкурса Мёбиуса.