ОТЧЁТ ПО ГРАНТУ ФОНДА ДИНАСТИЯ ЗА 2013 ГОД

Р.Н. КАРАСЁВ

1. Научные публикации

В работе [1] мы заметили один полезный факт о топологии многообразия Штифеля ортонормальных k-реперов в $\mathbb{R}^n$: род Шварца естественного действия группы W_k на этом пространстве является максимально возможным, то есть равным размерности пространства плюс один. За W_k обозначена группа, которая переставляет вектора репера и произвольно меняет знаки некоторых из них. У этого результата есть определённые геометрические следствия, касающиеся критически описанных вокруг данного выпуклого тела параллелотопов и базисов в нормированных пространствах, ортонормальных по Биркгофу-Джеймсу. В обоих случаях мы доказываем, что количество таких объектов (параллелотопов или базисов) не менее $n(n-1)/2+1$, где n — размерность рассматриваемого пространства.

Бронислав Кнастер предположил, что для всякой непрерывной функции f на круглой сфере размерности $n-1$ и конечного множества X из n точек на сфере всегда можно найти изометрический образ X' множества X, на котором функция f станет постоянной. Эта гипотеза оказалась неверной, как доказали Борис Кашин и Станислав Шарек, хотя известны некоторые доказательства её частных случаев. В работе [2] мы анализируем известные подходы к задаче Кнастера и замечаем, что во многих случаях множество X оказывается орбитой действия конечной группы. Кроме того, эта группа G обычно оказывается p-тором, то есть произведением нескольких копий одной и той же циклической группы простого порядка. Далее, мы замечаем, что слабая гипотеза Кнастера (в которой размерности сферы разрешается быть намного больше, чем мощность множества X) верна для множеств X, которые можно заключить в орбиту p-тора. Для определённости, мы называем такие множества сферически суб-p-торическими (spherical sub-p-toral).

Давно известно, что в евклидовой теории Рамсея, которая изучает одноцветные множества в произвольной раскраске евклидова пространства в заданное число цветов, понятие «подорбиты» действия конечной группы очень полезно. Мы заимствуем некоторые идеи из евклидовой теории Рамсея и доказываем, что слабая задача Кнастера решается положительно для неэкваториальных треугольников на двумерной сфере, а её евклидов аналог решается положительно для произвольного симплекса. Однако, уже на одномерной окружности S^1 мы находим множества, не являющиеся суб-p-торическими ни для какого простого p, и показываем, что подходы к теореме Дворецкого с помощью таких результатов типа Кнастера пока недостаточны.

В работе [3] мы предлагаем новый подход к гипотезе Малера, сведя её к гипотезе Витербо из симплектической геометрии. Мои соавторы в своих предыдущих работах установили соответствие между минимальной длиной замкнутой бильярдной траектории в выпуклом теле K, измеренной с помощью некоторой нормы, и ёмкостью Хофера–Цендера $c_{HZ}(K \times T)$, где T — единичный шар двойственной нормы. В этой статье мы доказываем оценку снизу на длину замкнутой бильярдной траектории несимплектическими методами: эта величина не менее 4, если K — единичный шар некоторой нормы, а T — двойственное ему тело (единичный шар двойственной нормы). В симплектической геометрии Клод Витербо выдвинул гипотезу, что объём выпуклого тела X в $\mathbb{R}^{2n}$ не менее $c_{HZ}(X)^n/n!$. Если она верна, то $\operatorname{vol} K \times K^\circ \geq 4^n/n!$ для центрально симметричного выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ и его полярного тела, а это и есть классическая гипотеза Малера. Чтобы закончить доказательство гипотезы Малера, теперь остаётся доказать гипотезу Витербо. По последней гипотезе есть разумные соображения, но пока она выглядит трудной.

Статья [4] получилась слиянием двух текстов: моего arXiv:1011.4762 и arXiv:1010.4611 Альфредо Убарда и Бориса Аронова. Эта версия была подготовлена для официальной публикации. В ней немного прояснены и обобщены формулировки основных теорем и приложены некоторые усилия для объяснения доказательства топологической леммы. Мы используем подход Дмитрия Фукса и Виктора Васильева, которые ранее доказали частные случаи этой леммы. Более техническое и более строгое доказательство топологической леммы в терминах конечных полиэдров можно найти в статье arXiv:1202.5504 Павле Благоевича и Гюнтера Циглера.

В статье [5] замечено, что «количественные теоремы про размерность в смысле покрытий», такие как теорема Лебега про куб и теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича про симплекс, допускают единое объяснение в терминах торической геометрии. Это даёт некоторую общую точку зрения на такие утверждения, а также позволяет их немножко обобщить. Например, можно получить ответ на вопрос Дёмётёра Палвёлдьи, выложенный на сайте mathoverflow.net.

Раде Живалевич доказал вариант теоремы о бутерброде в произвольной размерности, теорему о делении «занавесками». Её двумерный случай достаточно прост: если даны две хорошие меры на плоскости и веер их трёх углов, то можно выбрать один из углов веера и сдвинуть его параллельным переносом так, что он отрежет ровно половину от каждой из мер. В работе [6] мы рассматриваем варианты такой теоремы на плоскости для вееров из большего трёх количества углов. В некоторых случаях нам удаётся доказать аналогичное утверждение, а в некоторых мы строим контрпримеры.

В работе [7] мы рассматриваем геометрический джойн семейства из m конечных множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$ в d-мерном евклидовом пространстве. Это просто множество всевозможных выпуклых комбинаций систем представителей данного семейства множеств. Нетрудно доказать, что при достаточно большом m это множество оказывается стягиваемым. Нам удалось доказать это при $m > d(d+1)/2$ и доказать, что множество звёздное при $m > d(d+1)$. Но вообще мы предполагаем, что геометрический джойн будет связен уже при $m = d+1$ и нам удаётся доказать эту гипотезу при $d = 2$ и $d = 3$.

Текущая информация о моих публикациях доступна также на сайте www.rkarasev.ru.

2. Преподавательская деятельность

Продолжаю преподавать в МФТИ, читаю курс лекций по математическому анализу и веду семинары. В этом году начал читать спецкурс «Основы симплектической геометрии».

Занимаюсь подготовкой команды студентов МФТИ для участия в математических олимпиадах, в этом году команда участвовала в наиболее представительной студенческой олимпиаде IMC 2013 в г. Благоевград, Болгария, и заняла первое место уже второй раз подряд.

Список литературы

[1] P.V.M. Blagojević, R.N. Karasev. The Schwarz genus of the Stiefel manifold. *Topology and its Applications* (2013), DOI:10.1016/j.topol.2013.07.028.

[2] B. Bukh, R.N. Karasev. Suborbits in Knaster's problem. *Arxiv preprint* arXiv:1212.5351, (2012).

[3] S. Artstein-Avidan, R.N. Karasev, Y. Ostrover. From symplectic measurements to the Mahler conjecture. *Arxiv preprint* arXiv:1303.4197, (2013).

[4] R.N. Karasev, A. Hubard, B. Aronov. Convex equipartitions: the Spicy Chicken theorem. *Arxiv preprint* arXiv:1306.2741, (2013).

[5] R.N. Karasev. Covering dimension using toric varieties. *Arxiv preprint* arXiv:1307.3437, (2013).

[6] A.M. Balitskiy, A.I. Garber, R.N. Karasev. Another ham sandwich in the plane. *Arxiv preprint* arXiv:1307.7698, (2013).

[7] I. Bárány, A.F. Holmsen, R.N. Karasev. Topology of geometric joins. *Arxiv preprint* arXiv:1309.0920, (2013).