Отчет по гранту Делиня за 2012 год

Владлен Тиморин

Результаты, полученные в этом году

Кубическим аналогом множества Мандельброта является кубическое множество связности M_3, состоящее из классов аффинной сопряженности кубических многочленов, у которых множество Жюлиа связно. Главной гиперболической компонентой в M_3 называется множество классов кубических многочленов, для которых множество Жюлиа — жорданова кривая. Рассмотрим многочлен, класс которого лежит в замыкании главной гиперболической компоненты. Тогда 1) у этого многочлена есть неотталкивающая неподвижная точка, 2) у этого многочлена нет разделяющих отталкивающих периодических точек, 3) у этого многочлена есть не более одной неотталкивающей периодической точки, мультипликатор которой отличен от 1. Последнее утверждение вытекает из неравенства Йоккоза.

Мы определяем главную кубиоиду CU как множество классов $[f]$, удовлетворяющих трем перечисленным свойствам. Наша гипотеза состоит в том, что замыкание главной гиперболической компоненты совпадает с множеством CU.

Предположим, что у f есть непритягивающая неподвижная точка. Мы доказали следующие результаты. Если $[f]$ не принадлежит главной кубиоиде, то ограничение отображения f на некоторую жорданову область является квадратично-подобным отображением со связным множеством Жюлиа. (Из теоремы Дуади и Хаббарда известно, что квадратично-подобное отображение со связным множеством Жюлиа топологически сопряжено квадратному многочлену в некоторой окрестности заполненного множества Жюлиа).

Доказана также следующая теорема. Предположим, что класс $[f]$ не принадлежит замыканию главной гиперболической компоненты, но имеет неотталкивающую неподвижную точку. Тогда верно хотя бы одно из следующих утверждений:

1. ограничение отображения f на некоторую жорданову область является квадратично-подобным отображением со связным множеством Жюлиа;
2. критическая точка отображения f отображается в диск Зигеля на некоторой итерации;
3. множество Жюлиа многочлена f имеет положительную меру, и на нем определено измеримое инвариантное поле направлений.

Согласно широко известной гипотезе, случай 3 никогда не реализуется.

У нас также имеется явное описание всех инвариантных ламинаций Терстона, соответствующих многочленам, классы которых принадлежат CU.

В совместном проекте с В.Кириченко и П.Гусевым, мы считали число вершин многогранников Гельфанда–Цетлина. Зафиксируем натуральное число k, и рассмотрим все разбиения вида $1^{i_1}\dots k^{i_k}$ и соответствующие этим разбиениям многогранники Гельфанда–Цетлина $GZ(1^{i_1}\dots k^{i_k})$. Обозначим через E_k экспоненциальную производящую функцию для числа $V(1^{i_1}\dots k^{i_k})$ вершин в многограннике $GZ(1^{i_1}\dots k^{i_k})$, т.е. формальный степенной ряд

$$E_k = \sum_{i_1,\dots,i_k\geq 0} V(1^{i_1}\dots k^{i_k})\frac{z_1^{i_1}}{i_1!}\dots\frac{z_k^{i_k}}{i_k!}.$$

Мы вывели следующее уравнение с частными производными на E_k:

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial z_1\dots\partial z_k}-\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial z_{k-1}}+\frac{\partial}{\partial z_k}\right)\right)E_k=0.$$

Таким образом, $E_1(z_1)=e_1^z$, $E_2(z_1,z_2)=e^{z_1+z_2}I_0\left(2\sqrt{z_1z_2}\right)$, где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода с параметром 0:

$$I_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!^2}.$$

Интересно также рассматривать обыкновенную производящую функцию для чисел $V(1^{i_1}\dots k^{i_k})$:

$$G_k(y_1,\dots,y_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k\geq 0}V(1^{i_1}\dots k^{i_k})y_1^{i_1}\dots y_k^{i_k}.$$

На эту функцию мы получили разностные уравнения. Для всякого степенного ряда f от переменных y_1, …, y_k, мы определим действие оператора разделенных разностей Δ_i на f как

$$\Delta_i(f)=\frac{f-f|_{y_i=0}}{y_i}.$$

Функция G_k удовлетворяет следующему уравнению

$$(\Delta_1\dots\Delta_k-(\Delta_1+\Delta_2)\dots(\Delta_{k-1}+\Delta_k))\,G_k=0.$$

При $k=1$, 2 и 3, эту функцию можно вычислить явно. Нетрудно видеть, что

$$G_1(y_1)=\frac{1}{1-y_1},\quad G_2(y_1,y_2)=\frac{1}{1-y_1-y_2}.$$

Функция $G_3(x, y, z)$ равна

$$\frac{2xz - y(1-x-z) - y\sqrt{1-2(x+z)+(x-z)^2}}{2(1-x-z)((x+y)(y+z)-y)}.$$

Числа $V_{k,\ell,m} = V(1^k 2^\ell 3^m)$ можно также представить как коэффициенты некоторых многочленов Лорана. А именно, число $V_{k,\ell,m}$ совпадает с коэффициентом при $x^k z^m$ в многочлене Лорана

$$\frac{1-xz}{1+xz}\left((1+x)^{k+\ell+m}(1+z)^{k+\ell+m} - (x+z)^{k+\ell+m}\right).$$

Итоги трех лет, сравнение результатов с заявкой

Не все из полученных за три года результатов соответствуют первоначальной заявке. Так получилось, что кроме собственно динамических систем на сфере Римана я занимался комбинаторикой и проективной геометрией. Впрочем, главный пункт заявки (доказательство общего результата о полусопряжении между разрезанной сферой с негиперболической динамикой и сферой с гиперболической критически конечной динамикой) был выполнен. Результат записан и существует (пока) в виде препринта. Потенциальная область применения этого результата широка, но нужно разобрать конкретные примеры. Один такой пример (применение к спариваниям квадратных многочленов) обсуждается в нашей совместной статье с И.Машановой, принятой к публикации в Annales de Toulouse. Я надеюсь в ближайшее время рассмотреть другие приложения, например, применить разработанную технику топологической хирургии к динамике кубических многочленов.

Опубликованные и поданные в печать работы

1. *Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда-Цетлина*, Кириченко В.А., Смирнов Е.Ю., Тиморин В.А. // Успехи математических наук, 2012. Т. 67. No. 4. С. 89–128

2. *Osculating curves: around the Tait-Kneser Theorem*, E. Ghys, S. Tabachnikov, V.A. Timorin // Mathematical Intelligencer, doi:10.1007/s00283-012-9336-6

3. *Captures, matings and regluings*, I. Mashanova, V.A. Timorin // To appear in the Annales de Toulouse

4. *Planarizations and maps taking lines to linear webs of conics* V.A. Timorin // To appear in the Mathematical Research Letters

5. *Dynamical cores of topological polynomials*, Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R., V.A. Timorin // To appear in Proceedings of the International Conference “Frontiers in Complex Dynamics” celebrating J. Milnor’s 80th Birthday, Princeton University Press

Препринты:

1. A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, “Laminations from the Main Cubioid”
2. A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, “The Main Cubioid”

Участие в конференциях и школах

Январь Christmas meetings with Pierre Deligne, Рождественские встречи фонда «Династия» Независимому Московскому университету 20 лет 8.01.2012 - 10.01.2012 Российская Федерация, Москва

Февраль зимняя школа НИУ-ВШЭ по математике (Клязьма)

Май XI Международная школа ИТЭФ-НИУ ВШЭ-ИТФ по теоретической математической физике 2.05.2012 - 10.05.2012 Украина, Севастополь

Июнь Holomophic foliations and complex dynamics 11.06.2012 - 15.06.2012 Москва

Июль The eighteenth International Conference on Difference Equations and Applications 22.07.2012 - 26.07.2012 Испания, Барселона

Сентябрь INdAM Conference New Trends in Holomorphic Dynamics 2.09.2012 – 7.09.2012 Италия, Кортона

Доклады на семинарах:

- семинар по динамическим системам, МГУ
- семинар Глобус, НМУ
- семинар лаборатории Чебышева, СПбГУ

Работа в научных центрах и международных группах

Совместный проект с коллегами из университета Алабамы в Бирмингеме.

Педагогическая и административная деятельность

Я преподаю на факультете математики Высшей Школы Экономики. В этом году, я читал следующие курсы:

1. уравнения с частными производными, 3-4 курсы
2. Basic Representation Theory (совместный курс англоязычной магистратуры НИУ ВШЭ по математике и программы Math in Moscow)

Кроме того, я вел учебные семинары по дифференциальным уравнениям на 2 курсе. Я являюсь заместителем декана факультета математики по международным связям. С этой должностью связана существенная административная нагрузка.

Я руковожу курсовыми и выпускными квалификационными работами семи студентов.

В Независимом Московском Университете, я веду (вместе с А.Буфетовым и Г.Мерзоном) основной курс геометрии для студентов 1 курса.