

Вариационный принцип. А. Я. Канель-Белов. Монстр-13-2.

Вы пришли на олимпиаду и получили Задачу:

Доказать, что некая хрень существует.

Сразу искомую хрень не построить (иначе задача была бы примитивна), поэтому вначале строим только *прехрень*. Потом улучшаем прехрень с помощью процесса. В процессе уменьшается (увеличивается) *хреновость* — некий *полуинвариант*. Нужно определить хреновость так, чтобы когда она более не может меняться, цель была бы достигнута, т.е. искомая хрень построена.

Пример: В парламенте у каждого не более 3-х врагов. Докажите, что парламент можно разбить на 2 палаты так, чтобы у каждого в своей палате было бы не более 1 врага.

Прехрень—произвольное изначальное разбиение парламента, *хрень*—то что надо достичь. *Шаг процесса*—взять члена парламента с более чем одним врагом в своей палате и отправить в другую. *Хреновость*—суммарное количество пар врагов в каждой палате.

1. Дан звездный многоугольник (многоугольник называется *звездным*, если внутри есть точка, из которой видны все вершины). Берутся две его стороны, образующие "впадину", и на них строится параллелограмм (как на сторонах). Эта операция повторяется с вновь полученным многоугольником и т.д. Докажите, что за конечное число шагов получится выпуклый многоугольник.
2. Докажите, что для каждого невыпуклого многоугольника найдется выпуклый многоугольник с тем же периметром, но большей площади.
3. Докажите, что n точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше n , а расстояние между любыми двумя больше 1.
4. Дана выпуклая фигура. Существует ли вписанный в нее пятиугольник, такой что опорная прямая к каждой вершине параллельна одной из его диагоналей.
5. Докажите, что к каждой точке границы выпуклого тела (в этом тексте если Вы не знаете, что такое *тело*, то замените это слово на *многогранник*) существует опорная плоскость.
6. На плоскости дано n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Докажите, что замкнутая ломаная минимальной длины, их соединяющая, не имеет самопересечений.
7. Дан выпуклый многогранник. Докажите, что существует замкнутая ломаная, имеющая с его гранями равные углы.
8. Дана выпуклая фигура Φ и число $k > 3$. Докажите, что существует k -угольник, стороны которого делятся пополам точками касания.
9. Дано выпуклое тело. Докажите, что на его поверхности можно отметить 4 точки и 4 опорные плоскости в них так, чтобы опорная плоскость для каждой точки была параллельна плоскости, проходящей через три остальные точки.
10. На международном фестивале патриотической песни собрались делегации из n стран. Каждый день ровно одна делегация поет одну свою песню и уезжает. Оказалось, что каждая песня оскорбительна не более чем для трех других стран-участниц. Докажите, что можно так составить расписание, чтобы каждая страна выслушала бы не более трех оскорблений.
11. Из резисторов собрана цепь. Может ли ее сопротивление увеличиться, если между некоторыми клеммами подпаять еще один?
12. Груз висит на системе пружин, одну обрезали. Может ли он от этого подняться?
13. Дан выпуклый многоугольник. Доказать, что существует окружность, проходящая через 3 его вершины и содержащая его целиком.
14. Дан тетраэдр. Доказать, что к некоторому его ребру прилегают только острые углы.
15. Прожектор освещает угол $\frac{2\pi}{n}$. Дано n точек. Можно ли n прожекторов разместить в этих точках так, чтобы они осветили всю плоскость?