Комбинаторика
07.04.07

1) Какое максимальное количество подпоследовательностей вида $k, k+1, k+2$ может иметь последовательность из 2007 натуральных чисел?

2) Дано множество из $n > 3$ точек на плоскости, причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой и никакие 4 не лежат на одной окружности. Для каждой точки считается количество содержащих ее кругов, окружности которых проходят через 3 различные точки данного множества. Найдите сумму полученных n чисел.

3) Найдите все конечные последовательности целых чисел $a_0, a_2, \ldots, a_n$, в которых число m, где $m = 0, 1, \ldots, n$ встречается ровно a_m раз.

4) В городе есть n площадей, от каждой отходит 4 улицы. Надо проложить троллейбусные маршруты так, чтобы по каждой улице проходило ровно 3 маршрута и при въезде на площадь они разъезжались на 3 оставшиеся улицы. Какое максимальное количество маршрутов можно проложить? (Граф не обязательно плоский, петли могут быть, тупиков в городе нет.)

5) Есть n башней, причем первая содержит n кирпичей, а остальные пустые. Если некоторая башня содержит хотя бы на 2 кирпича больше, чем следующая, то один кирпич перекладывается. Если есть несколько вариантов перекладки, то выбирается любой из них. Найдите конечное распределение кирпичей по башням.

6) Докажите, что существует множество из $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ последовательностей из $2n$ цифр, n нулей и n единиц, такое, что любая последовательность из n нулей и n единиц может быть получена из элемента этого множества сдвигом одной цифры. Сдвиг одной цифры вытаскивает цифру из последовательности и вставляет ее в любое другое место.

7) Найдите минимально возможное количество ладей, поставленных на доске $n \times n$ так, что на любой полоске из k идущих подряд по горизонтали или по вертикали клеток доски стоит хотя бы одна ладья. Считаем $\frac{n}{2} < k \leq \frac{2n}{3}$.

Комбинаторика
07.04.07

1) В конечном графе любые два треугольника имеют общую вершину и нет полного подграфа с 5 вершинами. Докажите, что можно удалить из графа 2 вершины вместе с выходящими из них ребрами так, что полученный граф не будет содержать треугольников.

2) Пусть A есть набор из n остатков по модулю n^2. Докажите, что найдется набор B из n остатков такой, что попарные суммы из наборов A и B содержат не менее половины от всех остатков по модулю n^2.

3) Все целые числа покрашены в 4 цвета. Даны различные нечетные числа m, n такие, что $m + n \neq 0$. Докажите, что найдутся два числа одного цвета с разницей, равной какому-то из чисел $m, n, m + n, m - n$.

4) На плоскости нарисованы n прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Плоскость разбилась на области, ограниченные многоугольниками. Выберем те из них, которые содержат хотя бы одну из вершин исходных прямоугольников. Для каждого выбранного многоугольника посчитаем количество его вершин и сложим. Докажите, что полученное число меньше $40n$.

5) Пусть a и b взаимно простые натуральные числа. Назовем подмножество натуральных чисел хорошим, если оно содержит 1, и вместе с числом k содержит также числа $k+a$ и $k+b$. Найдите количество хороших множеств.

6) Дано простое число $p > 3$. Обозначим за M количество состоящих из чисел 0, 1 и 2 последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ таких, что $a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$ делится на p. Обозначим за N число аналогичных последовательностей из 0, 1 и 3. Докажите, что $M \leq N$.

7) Придумайте соединение некоторых концов стержней между собой и закрепление остальных концов на плоскости так, чтобы выполнялись два условия:

(а) При любых малых изменениях длин стержней весь механизм можно положить на плоскость, сохранив длины стержней, но возможно с пересечениями и совмещениями концов стержней.

(б) Для данных длин и закрепленных точек существует ровно одно положение механизма в плоскости.

Считайте, что стержней конечное число и их длины могут различаться.