Задачи комбинаторной геометрии

А.М. Райгородский

1. В группе школьников 20 человек. Из них 5 человек одинаково хорошо и лучше всех остальных решают задачи по комбинаторике, 5 - по комбинаторной геометрии, 5 - по классической геометрии, 5 - по теории чисел и т.д. (всего 18 предметов, так что, очевидно, некоторые школьники в равной мере сильны в нескольких дисциплинах). Требуется составить из этих школьников команду для участия в олимпиаде. При этом хочется, чтобы для каждого предмета в команде нашелся специалист в нем и чтобы размер команды был как можно меньше.

а) Докажите, что всегда есть команда из < 14 человек. **б)** Докажите, что всегда есть команда из семи человек. **в)** Докажите, что при некотором раскладе заведомо нужно взять в команду четверых. **г)** шестерых. **д)** Можно ли улучшить результат пункта **б)**, т.е. всегда ли удастся собрать команду из шестерых школьников?

2. Рассмотрим в двадцатимерном пространстве некоторое множество точек V, содержащееся в множестве Σ:

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{20}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 20; x_1 + \ldots + x_{20} = 5\}.$$

Иными словами, V - это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{10}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 7 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

3. Рассмотрим в десятимерном пространстве некоторое множество точек V, содержащееся в множестве Σ:

$$V \subset \Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{10}) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 10; x_1 + \ldots + x_{10} = 5\}.$$

Иными словами, V - это произвольный набор точек, координаты которых суть 0 или 1, причем единиц у каждой точки ровно 5. Допустим, $|V| = 20$. Соединим точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ отрезком, если расстояние между ними есть $\sqrt{8}$. Докажите, что все наши точки можно так раскрасить в 9 цветов, чтобы концы любого отрезка были разноцветными.

4. Рассмотрим в n - мерном пространстве репер $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, состоящий из векторов

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathbf{e}_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, 0), \ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 0, 1).$$

Возьмем множество всех *целочисленных комбинаций* векторов из $\mathcal{E}$, т.е. множество вида $\{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n\}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Такое множество называется *целочисленной решеткой* и обозначается $\mathbb{Z}^n$. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$ - это векторы, у которых все координаты рациональны. Положим

$$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t} = \{\mu_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \mu_t \mathbf{a}_t + \mathbf{b}\}, \ \mu_1, \ldots, \mu_t \in \mathbb{Z}, \ \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n.$$

Обозначим через $d_n(\mathcal{E}; \Lambda)$ величину

$$d_n(\mathcal{E}; \Lambda) = \min \{d : \text{ найдутся такие векторы } \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{n-d}} \in \mathcal{E} \text{ и такие векторы } \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d \in \Lambda, \text{ что}$$

$$\Lambda = \{\lambda_1 \mathbf{e}_{i_1} + \ldots + \lambda_{n-d} \mathbf{e}_{i_{n-d}} + \mu_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \mu_d \mathbf{b}_d\}, \ \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Эта величина называется *дефектом репера $\mathcal{E}$ относительно* Λ, и словами можно сказать так: дефект - это минимальное количество векторов, которые необходимо удалить из репера с тем, чтобы оставшаяся система векторов могла быть дополнена до *базиса* (см. [2]) в Λ.

а) Докажите, что для любого $d \in \{0, 1, 2\}$ найдется такой вектор $\mathbf{a}$, что $d_2(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) = d$. **б)** Докажите аналогичное утверждение в произвольной размерности. **в)** Пусть $\mathcal{O}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : |x_1| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$ - *единичный n - мерный октаэдр.* Докажите, что существует t и такой набор векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$, для которого $\Lambda_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t} \cap \mathcal{O}_n = \{O, \pm \mathcal{E}\}$ (O - начало координат) и $d_n(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t}) \geq n - 10 \log_2 n$.
г) Пусть $\Re_{15} = \{1, \ldots, 15\}$ - множество из пятнадцати элементов. Возьмем произвольную совокупность мощности 14, состоящую из некоторых (различных) шестиэлементных подмножеств (сочетаний) в $\Re_{15}$. Обозначим эту совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_{14}\}$. Рассмотрим какие-нибудь несовпадающие простые числа $p_1, \ldots, p_{14}$: например, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ и т.д. Положим $q_i = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{14}^{\alpha_{14}}$, где $\alpha_\nu = 1$, если $i \in M_\nu$, $\alpha_\nu = 0$ в противном случае ($\nu \in \{1, \ldots, 14\}, i \in \Re_{15}$). Обозначим $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_{15}}\right)$. Докажите, что $d_{15}(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \leq 5$.

Выход на серьезную науку

[1] *Хроматическим числом* графа $G = (V, E)$ называется величина $\chi(G)$, равная минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить V, чтобы вершины, соединенные ребрами, были разноцветны. В задачах 2 и 3 речь идет как раз о хроматическом числе *графа расстояний*, т.е. графа, вершины которого суть точки пространства, а ребра - отрезки определенной длины, соединяющие некоторые из этих точек.

1.1. Докажите, что хроматическое число любого графа расстояний конечно и как можно точнее оцените его.

1.2. Докажите, что хроматическое число любого двумерного графа расстояний не превосходит семи.

1.3. Пусть $V \subseteq \{0,1\}^n$, а E порождено теми и только теми парами точек из V, квадрат расстояния между которыми равен k. Докажите, что $\chi(G) \le 2^{n-k+1}$, коль скоро $G = (V, E)$.

[2] *Решеткой* называется совокупность точек в пространстве, являющихся целочисленными комбинациями некоторых линейно-независимых векторов. Сами эти векторы образуют *базис* в решетке. Вообще говоря, базис в решетке не единственен. Множество Λ из четвертой задачи - решетка. Объем *фундаментальной ячейки* решетки Λ называется ее *определителем* и обозначается $\det \Lambda$.

2.1. Докажите, что если Λ - решетка, а Ω - выпуклое n - мерное тело, симметричное относительно начала координат, причем объем Ω строго больше $2^n \det \Lambda$, то в Ω есть по крайней мере две точки решетки Λ.

2.2. Докажите, что если $\mathbf{a} = \left(\frac{a_1}{q}, \ldots, \frac{a_n}{q}\right)$ и НОД$(a_1, \ldots, a_n, q) = 1$, то $\det \Lambda_{\mathbf{a}} = \frac{1}{q}$.

2.3*. Докажите, что, каков бы ни был вектор $\mathbf{a}$, $d_n(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \le c \frac{n}{\log n} (\log \log n)^2$, коль скоро $\Lambda_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{O}_n = \{O, \pm\mathcal{E}\}$.