Ориентированные углы

Каринэ Куюмжиян

Менделеево 2 апреля 2007 группа Орла

Пожелание к принимающим задачи. В тех задачах, в которых возможны различные случаи, решение принимать ТОЛЬКО в направленных углах.

Величиной ориентированного угла $\angle(AB, CD)$ между прямыми AB и CD будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180°$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме $180°$ или, что по нашему соглашению то же самое, $0°$).

Свойства ориентированных углов:

1. $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$
2. $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$
3. точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$
4. если точки A, B, C лежат на окружности, CD — прямая, касательная к этой окружности, то $\angle(CD, CB) = \angle(AC, AB)$.

Задачи

1. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Доказать, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку.

2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность. Пусть X — некоторая точка этой окружности, M, N, K и L — проекции точки X на прямые AC, BC, AD и BD. Докажите, что точки M, N, K и L лежат на одной окружности.

3. Дан треугольник ABC с ортоцентром H. H спроектировали на медиану BM и получили точку P. Доказать, что A, H, P и C лежат на одной окружности.

4. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. Точка M — проекция точки X на прямую AC, а точка N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 —центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что $O_1O_2O_3O_4$ —прямоугольник.

6. Пусть прямая пересекает одну окружность в точках A и B, а другую — в точках C и D. Доказать, что точки пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках A и B, с касательными, проведенными ко второй окружности в точках C и D (рассматриваются точки, в которых пересекаются касательные к разным окружностям), лежат на одной окружности (если хотите, докажите, что ее центр лежит на прямой, проходящей через центры данных окружностей).

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На прямых AB и BC отмечены точки X и Y соответственно, так что $XBYD$ — параллелограмм. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD, прямые AC и XY пересекаются в точке L. Докажите, что точки M, N, L и D лежат на одной окружности.